MAJORISIERUNG UND STABILITÄT DER LÖSUNGEN RETARDIERTER CAUCHYPROBLEME

Dissertation

der Mathematischen Fakultät der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

Zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Wolfgang Kerscher aus Stuttgart

Tübingen, Juni 1986

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543903_0060

MAJORISIERUNG UND STABILITÄT DER LÖSUNGEN RETARDIERTER CAUCHYPROBLEME

Dissertation

der Mathematischen Fakultät der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

Zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Wolfgang Kerscher aus Stuttgart

Tübingen, Juni 1986

Tag der mündlichen Qualifikation: 3. 6. 1986

Dekan:	Prof. Dr. P. Schmid
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. R. Nagel
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. P. Hadeler

Inhalt

I Einleitung und Beispiele 1

II Abstrakte Funktionaldifferentialgleichungen 12
1 Translationen 13
2 Störungen 17
3 Retardierte Cauchyprobleme 27

III Spektraltheorie und Asymptotik 33
1 Stabilität: Definitionen und Resultate 35
2 Regularität 38
3 Positivität 49
4 Stabilität unabhängig von der Verzögerung 62

IV Anwendungen 82
1 Modelle aus der theoretischen Biologie 82
Beispiel 1 : Skalare Populationsgleichung
Beispiel 2 : Logistisches Populationswachstum
Beispiel 3 : Goodwin Oscillator
2 Semilineare Reaktions-Diffusionsgleichungen 92
Beispiel 4 : Logistisches Wachstum einer räumlich verteilten Population
Beispiel 5 : Epidemiemodell
3 Die lineare Boltzmanngleichung 99
Beispiel 6 : Das Reaktorproblem

Literaturverzeichnis 103

Meinen Eltern,

Bernadette und

Jan-Philipp

I Einleitung und Beispiele

Physikalische,biologische oder ökonomische Systeme werden gewöhnlich durch Systeme gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen dargestellt.
Vor allem in biologischen Systemen treten aber manche Effekte mit einer Zeitverzögerung auf,so daß man Gleichungen mit einer Verzögerung in der Zeitvariablen betrachten muß (siehe etwa [Cus] oder den Übersichtsartikel [Had1]).
Zunächst ein einfaches Beispiel:

Beispiel 1.1 Skalare Populationsgleichung

Bezeichnet $u(t)$ die Populationsdichte zur Zeit $t \geq 0$, $b \geq 0$ die Geburtsrate und $d \geq 0$ die Sterberate,so läßt sich das Wachstum einer Population durch die einfache lineare Funktionaldifferentialgleichung

$$\dot{u}(t) = -du(t) + bu(t-r) \tag{1.1}$$

beschreiben,wobei man annimmt,daß das Populationswachstum zur Zeit t zur Populationsgröße zu einem schon zurückliegenden Zeitpunkt $t-r$ proportional ist.
Man denke z.B. an eine Fliegenpopulation,bei der die Anzahl der gelegten Eier proportional zur Populationsgröße ist,das Schlüpfen aber erst nach einer Reifeperiode der Dauer r erfolgt .

Diese Gleichung ist gut untersucht (vgl. [Hay], [Had1]) . Das asymptotische Verhalten wird durch die Parameter d , b und r in folgender Weise bestimmt:

Ist die Geburtsrate b kleiner als die Sterberate d , so konvergieren alle Lösungen von (1.1) gegen 0 , unabhängig von der Größe r der Zeitverzögerung.

Nimmt man nun an,daß die Sterberate von der Vergangenheit abhängt (z.B. wenn eine Population die Nahrungsgrundlage für die nächste Generation zerstört) , erhält man

$$\dot{u}(t) = bu(t) - du(t-r) \qquad (1.2)$$

Hier liegt eine völlig andere Situation vor:
Ist $d > b$,so gehen die Lösungen gegen 0 ,falls die Verzögerung r genügend klein ist. Es gibt aber stets ein r_0 ,so daß die Lösungen für $r > r_0$ instabil werden (vgl. [Had1]) .

Die Theorie solcher skalarer linearer und nichtlinearer Funktionaldifferentialgleichungen wurde in den letzten dreißig Jahren sehr weit entwickelt (ein Standardwerk ist [Hal]),ebenso die Theorie für Systeme solcher Gleichungen.

Hat man dagegen partielle Differentialgleichungen mit einer Verzögerung in der Zeitvariablen vorliegen, so ist der Einsatz tieferer funktionalanalytischer Methoden angebracht. Wir geben zunächst zwei Beispiele solcher Gleichungen an.

Beispiel 1.2 Diffusionsgleichung mit Verzögerung

Ein zu Beispiel 1.1 analoges Modell für das Wachstum einer räumlich verteilten Population (etwa auf dem Intervall $[0,1]$) ist die partielle Differentialgleichung

$$(1.2)\quad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - d(x)u(t,x) + b(x)u(t-r,x)\,,$$

$$t > 0\,,\ x\in(0,1)\,,\ b\,,\ d\in C[0,1]_+\,,$$

und Neumannschen Randbedingungen $u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0$. Diese Gleichung kann man als gewöhnliche Differentialgleichung mit Verzögerung auf einem geeigneten Funktionenraum interpretieren:

$$(1.2)'\quad \dot{u}(t) = \Delta u(t) - M_d u(t) + M_b u(t-r)$$
$$= Bu(t) + M_b u(t-r)\,,$$

wobei Δ den Laplaceoperator, M_b und M_b die Multiplikatoren mit b bzw. d bezeichnen und $B := \Delta - M_d$.

Beispiel 1.3 Lineare Boltzmanngleichung .

Die lineare Boltzmanngleichung (Neutronen Transportgleichung)

$$(LBG) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x,\xi) = Bf(t,x,\xi) :=$$

$$-\xi \operatorname{grad}_x f(t,x,\xi) - \mu(x,\xi) f(t,x,\xi) + \int_V k(x,\xi,\xi') f(t,x,\xi') d\rho($$

spielt eine wichtige Rolle z.B. in der Reaktortheorie. Dabei ist $x \in D$ und $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$ die Menge, in welcher Neutronentransport stattfindet. Ebenso ist $\xi \in V$ wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ die Menge der Geschwindigkeiten darstellt, welche Neutronen annehmen können. ρ ist ein Maß auf V.

In der physikalischen Interpretation der Gleichung wandern Neutronen in dem mit Materie gefüllten Raum D, werden absorbiert und gestreut. Die Funktion

$$f(t,.,.) : D \times V \longrightarrow [0,\infty)$$

beschreibt die Neutronendichte im Konfigurations-Gechwindigkeits-Raum zum Zeitpunkt $t > 0$ und (LBG) ist bei geeigneten Voraussetzungen nichts anderes als ein Massenerhaltungsgesetz.
Der erste Ausdruck beschreibt die freie Neutronenbewegung der zweite die Absorption und der dritte die Streuung: Partikel am Ort x mit Geschwindigkeit ξ' erzeugen andere Partikel in x mit neuer Geschwindigkeit ξ .

Die Herleitung der Gleichung und weitere Einzelheiten finden sich in [Cas], [Kap2] oder [Wil] .

Unter geeigneten Voraussetzungen (siehe [Gre4]) erzeugt der Boltzmannoperator B eine stark stetige positive Halbgruppe $\mathcal{S}$ auf dem Raum $L^1(D \times V)$.
Qualitative Eigenschaften der Lösungen von (LBG) können also im Kontext des abstrakten Cauchyproblems

$$\dot{u}(t) = Bu(t)$$
$$u(0) = u_0 \in D(B)$$

diskutiert werden, wobei $u(t) := f(t,.,.) \in L^1(D \times V)$ gesetzt wird .

Ein bekannter physikalischer Effekt bei der Neutronenstreuung ist das Auftreten von Neutronen mit einer Zeitverzögerung von Sekundenbruchteilen bis zu einer Minute (vgl. [Bell]) .
Zur Beschreibung solcher Effekte muß die Gleichung erweitert werden zu

$$(LBG)' \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t,x,\xi) = B_0 f(t,x,\xi) + \int_{-r_0}^{0} \int_V k(x,\xi,\xi',s) f(t+s,x,\xi') d\varrho(\xi') ds ,$$

so daß die Erzeugung der Neutronen auch von vergangenen Systemzuständen abhängt. Dabei ist B_0 die Summe der beiden ersten Operatoren in (LBG) .
Definiert man die Operatoren

$$K(s) : L^1(D \times V) \longrightarrow L^1(D \times V) \quad , \quad s \in [-r_0, 0] ,$$

durch

$$K(s)f(t,x,\xi) := \int_V k(x,\xi,\xi',s)f(t,x,\xi')d\rho(\xi') \quad ,$$

so ernält man eine abstrakte Gleichung

$$\dot{u}(t) = B_o u(t) + \int_{-r_o}^{o} K(s)\, u(t+s)ds \tag{1.4}$$

in $L^1(D \times V)$.

Neben der Lösbarkeit von (1.4) stellen sich Fragen nach dem qualitativen Verhalten der Lösungen, wie etwa:

- sind die Lösungen von (1.4) bei positiven Anfangswerten positiv ?
- was kann man über das asymptotische Verhalten der Lösungen aussagen ?
- wird das asymptotische Verhalten von der (in der Praxis schwer meßbaren) Größe r_o der Zeitverzögerung beeinflußt oder liegt eine Situation analog zu (1.1) vor ?

Die übliche abstrakte Darstellung für die oben vorgestellten Gleichungen (vgl. [Hal], [Tra]) ist

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + Mu_t \qquad . \tag{1.5}$$

Dabei ist B der Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf einem Banachraum X, M ist ein linearer stetiger Operator von $E := C([-r_o,0], X)$ nach X und $u_t \in E$ ist erklärt durch

$$u_t(s) := u(t+s) \qquad , \quad s \in [-r_o,0] \qquad .$$

Eine Existenztheorie für derartige Gleichungen mit stetigem Operator M wurde von [Tra] entwickelt, [DiB] gab eine Verallgemeinerung auf unbeschränkte M an. Die Translationsoperatoren entlang den Lösungen von (1.5) bilden eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf E mit Generator A, so daß man an Stelle von (1.5) ein äquivalentes abstraktes Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= Af(t) \\ f(0) &= g \in D(A) \subset E \end{aligned} \tag{1.6}$$

auf dem größeren Raum E betrachten kann.
Wir zeigen diesen Zusammenhang in Kapitel II auf, wobei wir einen anderen Zugang benutzen, der auf allgemeinen Störungssätzen von [Gre1] beruht und gleichzeitig qualitative Aussagen über die Halbgruppe gestattet.

Es liegt nun nahe, Aussagen über das asymptotische

Verhalten der Lösungen von (1.5) aus dem Spektrum des Generators A der Lösungshalbgruppe $\mathcal{T}$ abzuleiten, welches prinzipiell aus den Operatoren B und M berechenbar ist. Doch schon für Systeme skalarer Funktionaldifferentialgleichungen ist das Spektrum durch die Nullstellen einer transzendenten Funktion gegeben, deren analytische Behandlung im allgemeinen schwierig ist; für partielle Differentialgleichungen mit Verzögerung muß man die Spektren einer unendlichen Schar von Operatoren analysieren ([Tra], [Ker]). Wenn dagegen bekannt ist, daß die Stabilität für bestimmte Operatoren B und M nicht von der Verzögerung abhängt, wie z.B. in Beispiel (1.1), so genügt es, das Spektrum des Generators des unverzögerten Systems zu untersuchen (in (1.1) ist das der "Operator" b-d).

Für skalare Funktionaldifferentialgleichungen wurden von [Inf] hinreichende und notwendige Bedingungen angegeben, welche die Stabilität unabhängig von der Verzögerung garantieren, [Coo] verallgemeinerte diese Kriterien auf Systeme derartiger Gleichungen. Doch auch diese Bedingungen verwenden die Kenntnis des Spektrums einer unendlichen Schar von Matrizen.
Analysiert man die in [Inf], [Coo] oder [Len2] angegebenen Beispiele für Systeme, deren Stabilität von der Verzögerung unabhängig ist, so erkennt man, daß häufig Ordnungseigenschaften zugrundeliegen.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, welchen Beitrag die Untersuchung von Ordnungseigenschaften der Halbgruppe $\mathcal{T}$ zur Stabilitätstheorie von (1.5) liefern kann.

Wir charakterisieren also zunächst in III,3 Positivität der Halbgruppe $\mathcal{T}$ und zeigen,daß $\mathcal{T}$ positiv ist, falls B eine positive Halbgruppe erzeugt und M positiv ist. In III,4 beweisen wir unter Verwendung der Spektraltheorie positiver Halbgruppen, daß in diesem Fall die Stabilität von der Verzögerung unabhängig ist (diese Situation liegt z.B. in Beispiel (1.1) vor) .Sind die Positivitätsvoraussetzungen nicht erfüllt, so analysieren wir das asymptotische Verhalten einer Halbgruppe $\tilde{\mathcal{T}}$, welche $\mathcal{T}$ majorisiert (und daher positiv ist) ,und schließen dann auf $\mathcal{T}$ zurück.

Ist z.B. in (1.5) der Operator M nicht positiv, so erhält man die majorisierende Halbgruppe als Lösungshalbgruppe von (1.5) ,wenn man M durch $|M|$ ersetzt.

In beiden Fällen gelangt man durch Analyse des Spektrums eines <u>einzigen Operators</u> zu einer Abschätzung der Spektralschranke von A . Die gewonnenen Resultate sind auf allgemeine Gleichungen der Form (1.5) , also auch auf partielle Differentialgleichungen mit Verzögerung anwendbar.

Für Systeme skalarer Funktionaldifferentialgleichungen kann man vom Spektrum von A auf das Spektrum der Halbgruppe und damit auf das asymptotitsche Verhalten der Lösungen von (1.5) schließen,da in diesem Fall die

Operatoren $F(t)$ für $t > r_o$ kompakt sind ([Hal]). Dieses Resultat hat [Tra] auf partielle Differentialgleichungen mit Verzögerung verallgemeinert, unter der Voraussetzung, daß die von B erzeugte Halbgruppe kompakt für $t > 0$ ist.
Wir schwächen diese Bedingung in III,2 ab und zeigen, wann die Lösungshalbgruppe $\mathcal{T}$ normstetig für $t > r_o$ oder quasikompakt ist, was ja bekanntlich ([Nag1]) den spektralen Abbildungssatz (wenigstens für Teile des Spektrums) impliziert; das Resultat von [Tra] folgt als Korollar aus diesen allgemeineren Sätzen.
Außerdem weisen wir die Differenzierbarkeit der Halbgruppe für $t > t_o$ nach, unter der Voraussetzung, daß die von B erzeugte Halbgruppe analytisch ist.

In dieser Arbeit wird die Theorie linearer retardierter Gleichungen behandelt. In Kapitel IV zeigen wir dann Anwendungen der gewonnenen Resultate auf nichtlineare Gleichungen:

Eine häufig in Arbeiten der theoretischen Biologie ([Bed], [Ste1], [Wal3], [Had1]) untersuchte Frage ist, ob stabile Gleichgewichtslösungen durch Einführung eines Verzögerungseffekts destabilisiert werden können (oft lassen sich dann stabile periodische Lösungen nachweisen). Wir betrachten zur Untersuchung dieses Problems die an der stationären Lösung linearisierte Gleichung.

Mit Hilfe der in III,4. gewonnenen Resultate ist es in vielen Fällen möglich, einen Destabilisierungseffekt der Verzögerung auszuschließen, indem man einfach die Ordnungseigenschaften der Operatoren betrachtet (z.B. IV,Beispiel 5) .

Im einzelnen werden Populationsmodelle, ein Modell der Kontrolle biochemischer Reaktionsketten, semilineare Reaktions- Diffusionsgleichungen und ein Problem der Reaktortheorie untersucht.

II Abstrakte Funktionaldifferentialgleichungen

In diesem Kapitel geben wir einen abstrakten Rahmen an, in welchem Funktionaldifferentialgleichungen und partielle Differentialgleichungen mit einer Verzögerung in der Zeitvariablen behandelt werden können.
Dabei wählen wir einen störungstheoretischen Zugang (in Anlehnung an [Gre1]), indem wir zeitverzögerte Systeme als Störung von gewöhnlichen linearen Systemen behandeln.

1. Translationen

Es sei X ein Banachraum, $(B,D(B))$ der Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ auf X .
Die Halbgruppe $\mathcal{S}$ liefert bekanntlich (siehe etwa [Fat]) die Lösung des abstrakten Cauchyproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Bx(t) \\ x(0) &= x_0 \in D(B) \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Interessiert man sich für die Lösung nicht nur zu einem Zeitpunkt t ,sondern in einem ganzen Zeitintervall $[t-r_0,t]$,kann man das Problem auf einem größeren Raum untersuchen und die Translationsoperatoren entlang den Bahnen von $\mathcal{S}$ betrachten.
Sei also $E := C([-r_0,0],X)$ der Raum der stetigen X-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[-r_0,0]$.
Für $f \in E$, $s \in [-r_0,0]$ und $t \geq 0$ setze

$$T_B(t)f(s) := \begin{cases} S(t+s)f(0) & \text{falls } t+s \geq 0 \ , \\ f(t+s) & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Dadurch werden stetige,lineare Operatoren $T_B(t)$ auf E definiert . Es ist leicht nachzuprüfen,daß diese Translationsoperatoren wieder eine Halbgruppe bilden.

Satz 1.1 Die Operatoren $(T_B(t))_{t\geq 0}$ bilden eine stark stetige Halbgruppe $\mathcal{T}_B$ mit Generator $(A_B, D(A_B))$, wobei

$$D(A_B) = \{ f \in E \mid f \text{ stetig differenzierbar}, f(0) \in D(B), f'(0) = Bf(0) \} \quad \text{und}$$

$$A_B f = f' \quad \text{für} \quad f \in D(A_B) \quad \text{ist} .$$

Beweis Linearität, Stetigkeit und Halbgruppeneigenschaft übertragen sich direkt von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{T}_B$.

Für $t \geq 0$, $s \in [-r_o, 0]$ ist

$$\frac{1}{t}\left[T_B(t)f - f\right](s) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left[f(t+s) - f(s)\right] & \text{falls } s<0 \\ \frac{1}{t}\left[S(t)f(0) - f(0)\right] & \text{falls } s=0. \end{cases}$$

Daher existiert genau dann der Limes in E für $t \to 0$, wenn f stetig differenzierbar ist , $f(0) \in D(B)$ und $f'(0) = Bf(0)$ gilt.

Für diese f gilt dann

$$A_B f := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[T_B(t)f - f\right] = f' .$$

□

Da $\mathcal{T}_B$ in gewisser Weise eigentlich nur eine Fortsetzung von $\mathcal{S}$ auf einen größeren Raum darstellt, ist es nicht verwunderlich, daß die Spektren von B und A_B übereinstimmen. Allerdings ist A_B stets unbeschränkt, selbst wenn B stetig oder X endlichdimensional ist.

Satz 1.2 Es gilt $\sigma(A_B) = \sigma(B)$.
Für $\lambda \in \varrho(A_B)$, $g \in E$, $s \in [-r_o, 0]$ ist

$$R(\lambda, A_B)g(s) = e^{\lambda s} R(\lambda, B)g(0) + \int_s^0 e^{\lambda(s-t)} g(t)\, dt \quad .$$

Beweis Es ist genau dann $\lambda \in \varrho(A_B)$,falls die Gleichung

$$(\lambda - A_B)f = \lambda f - f' = g$$

für alle $g \in E$ eine eindeutige Lösung f in $D(A_B)$ besitzt .
Nun sind aber für $u \in X$ die Funktionen

$$(1.2) \qquad f(s) = e^{\lambda s} u + \int_s^0 e^{\lambda(s-t)} g(t)\, dt \quad , s \in [-r_o, 0]$$

stets stetig differenzierbare Lösungen in E.
Genau dann ist f sogar Lösung in $D(A_B)$, wenn es ein $u \in X$ mit folgenden Eigenschaften gibt :

(i) $u \in D(B)$

(ii) $f'(0) = \lambda f(0) - g(0) = \lambda u - g(0) = Bu$.

Dies ist nur dann für alle $g(0) \in X$ möglich,falls $\lambda \in \varrho(B)$.
In diesem Fall ist

$$u = R(\lambda, B)g(0)$$

und (1.2) ergibt die explizite Darstellung der Resolvente.

□

Schreibweise

(i) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit ε_λ die Funktion in $C[-r_o,0]$ mit

$$\varepsilon_\lambda(s) = e^{\lambda s} \quad , s \in [-r_o,0] \quad .$$

(ii) Für $u \in X$ und eine Funktion $f \in C[-r_o,0]$ bezeichne $f \otimes u$ das Element aus $C([-r_o,0],X)$, das durch

$$f \otimes u(s) = f(s)u \quad , s \in [-r_o,0]$$

erklärt ist .

(iii) Den 'Variation der Konstanten' Operator aus (1.2) bezeichnen wir mit H_λ, d.h.

(1.3)
$$H_\lambda : E \longrightarrow E$$
$$H_\lambda g(s) := \int_s^0 e^{\lambda(s-t)} g(t)\, dt \quad , \quad s \in [-r_o,0].$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Resolvente aus Satz 1.2 als

$$R(\lambda,A_B)g = \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B)g(0) + H_\lambda g$$

schreiben .

2. Störungen

Man kann sich das Cauchyproblem (1.1) als abstrakte Formulierung eines Systems von partiellen oder gewöhnlichen Differentialgleichungen vorstellen, welches ein reales physikalisches, biologisches oder ökonomisches System beschreibt. Bei der Modellierung solcher Systeme geht man häufig so vor, daß man zunächst die wichtigsten Grundeigenschaften in einem einfachen Modell bechreibt (etwa durch den Generator B) und dann weitere Systemeigenschaften durch Störungsoperatoren in das System einbringt, also etwa

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Bx(t) + Mx(t) \\ x(0) &= y \in D(B) \end{aligned} \qquad , \tag{2.1}$$

wobei M ein linearer, stetiger Operator auf X ist. Störungen dieser Art sind gut untersucht und können im Grundraum X behandelt werden.
Wie wir in Kapitel I an einigen Beispielen gesehen haben, treten in realen Systemen Störungen häufig mit einer gewissen Zeitverzögerung auf, also etwa

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Bx(t) + Mx(t-r_0) \\ x(s) &= y(s) \quad , \quad s \in [-r_0, 0] \end{aligned} \qquad . \tag{2.2}$$

In diesem Fall ist die Betrachtungsweise auf dem größeren Raum $E := C([-r_0, 0], X)$ angebracht, wobei die Verzögerung als lineare Abbildung $M \circ \delta_{-r_0}$ von E nach X angesehen wird.

Den Generator der Lösungshalbgruppe des gestörten Systems erhält man jedoch nicht durch einfache additive Störung wie in (2.1), sondern durch eine 'Störung des Definitionsbereichs' des Operators A_B. Die hierbei verwendete Technik geht auf ein allgemeines Resultat über derartige Störungen zurück [Gre1].

Sei $M: E \longrightarrow X$ linear und stetig.

Es sei

$$D(A_{B,M}) := \{f \in E \mid f \text{ stetig differenzierbar}, f(0) \in D(B), f'(0) = Bf(0) + Mf\},$$

$$A_{B,M} f := f' \quad \text{für} \quad f \in D(A_{B,M}).$$

$A_{B,M}$ ist ebenso wie A_B eine Einschränkung des Differentialoperators $f \longrightarrow f'$, wobei sich der Definitionsbereich von $A_{B,M}$ von $D(A_B)$ durch eine Störung der Randbedingung mit dem Operator M unterscheidet.
Wir werden sehen, daß auch $A_{B,M}$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ ist und daß $\mathcal{T}_{B,M}$ zu Lösungen von Problemen des Typs (2.2) führt.

Dazu betrachten wir für $\lambda \in \varrho(B)$ die Operatoren

$$D_\lambda : X \longrightarrow E$$

$$D_\lambda u := \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda, B)u, \quad \text{sowie}$$

$$J_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$J_\lambda := Id - D_\lambda M.$$

Lemma 2.1 Für genügend großes λ gelten für den Operator J_λ folgende Aussagen :

(i) J_λ ist invertierbar

(ii) $J_\lambda(D(A_{B,M})) = D(A_B)$

(iii) $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$ und

$$R(\lambda, A_{B,M}) = J_\lambda^{-1} R(\lambda, A_B) \quad .$$

Beweis

(i) Für geeignete Konstanten c, w gilt die Abschätzung :

$$\|D_\lambda M\| \leq \|D_\lambda\| \|M\| \leq \|R(\lambda, B)\| \|M\| \leq \frac{c}{\lambda - w} \|M\| < 1 \quad ,$$

falls $\lambda > w + c\|M\|$.

(ii) Die Menge $\{f \in E \mid f$ stetig differenzierbar, $f(0) \in D(B)\}$ wird offenbar von J_λ auf sich abgebildet.

Für jedes f aus dieser Menge gilt für $g := J_\lambda f$:

$$g'(0) - Bg(0) = f'(0) - \lambda R(\lambda, B)Mf - Bf(0) + BR(\lambda, B)Mf$$
$$= f'(0) - Bf(0) - Mf \quad .$$

Daher ist genau dann $g \in D(A_B)$, falls $f \in D(A_{B,M})$.

(iii) Sei $f \in D(A_{B,M})$. Dann ist

$$(\lambda - A_B) J_\lambda f = (\lambda - A_B)(f - D_\lambda Mf)$$
$$= \lambda f - f' - \lambda D_\lambda Mf + (D_\lambda Mf)'$$
$$= (\lambda - A_{B,M}) f - \lambda D_\lambda Mf + \lambda D_\lambda Mf$$
$$= (\lambda - A_{B,M}) f$$

oder

$$J_\lambda R(\lambda, A_{B,M}) f = R(\lambda, A_B) f \quad .$$

□

Satz 2.2 Sei $(B,D(B))$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf X, $M : E \longrightarrow X$ sei linear und stetig.
Dann ist $(A_{B,M},D(A_{B,M}))$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ auf E.

Beweis

OBdA können wir (nach eventueller Umnormierung) annehmen, daß $A_B - w$ für ein passendes w eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt.
Nach Lemma 2.1 existiert für großes λ die Inverse

$$J_\lambda^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (D_\lambda M)^n \quad \text{mit}$$

$$\|J_\lambda^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|D_\lambda M\|} \leq \frac{1}{1 - \frac{c\|M\|}{\lambda - w}} = \frac{\lambda - w}{\lambda - w - c\|M\|} ,$$

also hat man mit Lemma 2.1(iii)

$$\|R(\lambda, A_{B,M})\| \leq \frac{\lambda - w}{\lambda - w - c\|M\|} \cdot \frac{1}{\lambda - w} = \frac{1}{\lambda - (w + c\|M\|)} .$$

Die Behauptung folgt somit aus dem HILLE-YOSIDA Theorem.

□

Um nun eine explizite Darstellung der Resolvente zu erhalten, kann man die Inverse von J_λ berechnen. Dazu erklären wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ den Operator $M_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$M_\lambda u := M(\varepsilon_\lambda \otimes u)$$

und erhalten

Lemma 2.3 Sei $\|D_\lambda M\| < 1$. Dann gilt

$$J_\lambda^{-1} f = f + \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda, B + M_\lambda)Mf \quad .$$

Beweis Sei $f \in E$. Dann gilt

(i) $(D_\lambda M)^0 f = f$

(ii) $(D_\lambda M)^n f = \varepsilon_\lambda \otimes [R(\lambda,B)M_\lambda]^{n-1} R(\lambda,B)Mf \quad , n \geq 1$.

(i) ist trivial, ebenso (ii) für $n = 1$. Für $n > 1$ folgt durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned}(D_\lambda M)^n f &= D_\lambda M (D_\lambda M)^{n-1} f \\ &= D_\lambda M [\varepsilon_\lambda \otimes (R(\lambda,B)M_\lambda)^{n-2} R(\lambda,B)Mf] \\ &= \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B)M [\varepsilon_\lambda \otimes (R(\lambda,B)M_\lambda)^{n-2} R(\lambda,B)Mf] \\ &= \varepsilon_\lambda \otimes (R(\lambda,B)M_\lambda)^{n-1} R(\lambda,B)Mf \quad .\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}J_\lambda^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (D_\lambda M)^n f \\ &= f + \varepsilon_\lambda \otimes \sum_{n=0}^{\infty} [R(\lambda,B)M_\lambda]^n R(\lambda,B)Mf \\ &= f + \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda, B + M_\lambda)Mf \quad .\end{aligned}$$

□

Falls $\lambda \in \varrho(B+M_\lambda)$ genügend groß ist, so gilt für $g \in E$:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A_{B,M})g &= J_\lambda^{-1}\left[\varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B)g(0) + H\, g\right] \\ &= \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B)g(0) + H_\lambda g + \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B+M_\lambda)\left[M_\lambda R(\lambda,B)g(0)+\right. \\ &= \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B+M_\lambda)\left[(\lambda-B-M_\lambda+M_\lambda)R(\lambda,B)g(0)+MH_\lambda g\right] + H_\lambda g \\ &= \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B+M_\lambda)\left[g(0) + MH_\lambda g\right] + H_\lambda g \quad . \end{aligned}$$

Es zeigt sich sogar,daß durch obigen Ausdruck die Resolvente von $A_{B,M}$ in jedem Fall gegeben ist.

Satz 2.4 Das Spektrum von $A_{B,M}$ wird durch die Spektren der Operatorfamilie $(B+ M_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ in folgender Weise bestimmt:

(i) $\lambda \in \sigma(A_{B,M}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(B + M_\lambda)$.

(ii) Für $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$, $g \in E$ hat die Resolvente die Gestalt

$$R(\lambda, A_{B,M})g = \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda, B+M_\lambda)(g(0) + MH_\lambda g) + H_\lambda g \quad .$$

Beweis

Es ist leicht nachzurechnen, daß für $\lambda \in \varrho(B + M_\lambda)$ der angegebene Operator tatsächlich die Inverse von $\lambda - A_{B,M}$ darstellt, also ist $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$.

Ist andererseits $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$, so hat die Gleichung

$$(\lambda - A_{B,M})f = \varepsilon_\mu \otimes u$$

für alle $u \in X$ und alle $\mu \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $f \in D(A_{B,M})$ der Form

$$f = \varepsilon_\lambda \otimes w + H_\lambda(\varepsilon_\mu \otimes u) \quad \text{für ein } w \in X \ .$$

Das impliziert

(i) $w \in D(B)$

(ii) $f'(0) = \lambda w - u = Bf(0) + Mf$

$$= Bw + M_\lambda w + MH_\lambda(\varepsilon_\mu \otimes u)$$

und damit

(ii)' $(\lambda - B - M_\lambda)w = u + MH_\lambda(\varepsilon_\mu \otimes u) = (Id + S)u$,

wenn man $Su := MH_\lambda(\varepsilon_\mu \otimes u)$ setzt.

Die eindeutige Lösbarkeit von (ii)' ergibt $\lambda \in \varrho(B + M_\lambda)$, wenn der Operator Id+S surjektiv ist.

Dies ist tatsächlich der Fall, da wegen

$$\|S\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|MH_\lambda(\varepsilon_\mu \otimes u)\| \leq \|M\| \sup_{s \in [-r_0, 0]} \left(\int_s^0 e^{\mathrm{Re}\,\lambda(s-t)} e^{\mu t} dt \right)$$

$$\leq \|M\| \frac{1}{\mu - \mathrm{Re}\,\lambda} < 1 \quad \text{für großes } \mu \ ,$$

der Operator Id + S invertierbar und insbesondere surjektiv ist . □

Wir haben gesehen, wie man durch den Störungsansatz Aussagen über $A_{B,M}$ aus Eigenschaften von A_B gewinnen kann. Im folgenden wollen wir die Zusammenhänge zwischen zugehörigen Halbgruppen untersuchen.

Seien N,M stetige lineare Operatoren von E nach X, sei B der Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf X. Wir betrachten die Generatoren $A_{B,N}$ und $A_{B,M}$ und definieren analog zu 2.1 eine Abbildung zwischen den Definitionsbereichen durch

$$D_\lambda(M)u := \mathcal{E}_\lambda \otimes R(\lambda, B + M_\lambda)u \quad ,$$
$$J_\lambda(M,N) := Id - D_\lambda(M)(N-M) \quad .$$

Dann folgt analog zu Lemma 2.1

Lemma 2.5 Für genügend große λ gelten folgende Aussagen :

(i) $J_\lambda(M,N)$ ist invertierbar ,

(ii) $J_\lambda(M,N)D(A_{B,N}) = D(A_{B,M})$,

(iii) $R(\lambda, A_{B,N}) = J_\lambda^{-1} R(\lambda, A_{B,M})$.

Beweis

(i) $\| D_\lambda(M)(N-M)\| \leq \| R(\lambda, B+M_\lambda)\| \, \|N-M\| < 1$ für großes λ, da $\|R(\lambda,B+M_\lambda)\| \longrightarrow 0$ für $\lambda \longrightarrow \infty$.

(ii) Zunächst bildet $J_\lambda(M,N)$ die Menge $\{f \in E \mid f$ stetig differenzierbar, $f(0) \in D(B)\}$ auf sich ab. Ist f aus dieser Menge, so gilt für $g := J_\lambda(M,N)f$:

$$g'(0)-Bg(0)-Mg = f'(0)-Bf(0)-Mf - [\lambda R(\lambda,B+M_\lambda) - BR(\lambda,B+M_\lambda) - M_\lambda R(\lambda,B+M_\lambda)](N-M)f$$
$$= f'(0)-Bf(0)-Mf - (\lambda-B-M_\lambda)R(\lambda,B+M_\lambda)(N-M)f$$
$$= f'(0)-Bf(0)-Nf \quad .$$

Daher ist genau dann $g \in D(A_{B,M})$, wenn $f \in D(A_{B,N})$.

(iii) Sei $f \in D(A_{B,N})$.

Dann ist

$$(\lambda - A_{B,M})J_\lambda(M,N)f = (\lambda-A_{B,M})(f-D_\lambda(M)(N-M)f)$$
$$= \lambda f-f'- \lambda D_\lambda(M)(N-M)f + (D_\lambda(M)(N-M)f)'$$
$$= (\lambda - A_{B,N})f \quad ,$$

oder

$$J_\lambda R(\lambda,A_{B,N})f = R(\lambda,A_{B,M})f \quad .$$

□

Unterscheiden sich die Randbedingungen nur um einen "glatten" Operator, so kann man eine nützliche Beziehung zwischen den Halbgruppen herleiten. Dieses Resultat wurde in [Gre1], Theorem 2.3 für Störungen von Randbedingungen gezeigt. Der Vollständigkeit halber wird der Beweis für unsere spezielle Situation formuliert.

Satz 2.6 Ist der Operator $(N-M)A_{B,N}$ stetig (fortsetzbar) von E nach X, so gilt zwischen den Halbgruppen $T_{B,N}$ und $T_{B,M}$ folgende Beziehung für $\lambda \in \varrho(A_{B,N})$:

$$T_{B,N}(t) - T_{B,M}(t) = D_\lambda(M)(N-M)T_{B,N}(t) - T_{B,M}(t)D_\lambda(M)(N-M)$$
$$+ \int_0^t T_{B,M}(t-s)D_\lambda(M)(N-M)(\lambda - A_{B,N})T_{B,N}(s)ds \ .$$

Bemerkung Das Integral existiert in der starken Operatortopologie, da nach Voraussetzung der Integrand eine stark stetige Funktion ist.

Beweis Es sei $f \in D(A_{B,N})$, $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$ und $t > 0$. Die Funktion $\eta : [0,t] \longrightarrow E$ sei erklärt durch

$$\eta(s) := T_{B,M}(t-s)J_\lambda(M,N)T_{B,N}(s)f$$

Wegen Lemma 2.5 (ii) ist η differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\eta'(s) &= T_{B,M}(t-s)J_\lambda(M,N)A_{B,N}T_{B,N}(s)f \\
&\quad - T_{B,M}(t-s)A_{B,M}J_\lambda(M,N)T_{B,N}(s)f \\
&= T_{B,M}(t-s)\, J_\lambda(M,N)(A_{B,N} - \lambda)T_{B,N}(s)f \\
&\quad - T_{B,M}(t-s)(A_{B,M} - \lambda)J_\lambda(M,N)T_{B,N}(s)f \\
&= T_{B,M}(t-s)\left[J_\lambda(M,N)(A_{B,N} - \lambda) - (A_{B,N} - \lambda)\right]T_{B,N}(s)f \\
&= T_{B,M}(t-s)D_\lambda(M)(N-M)(A_{B,N} - \lambda)T_{B,N}(s)f \ .
\end{aligned}$$

Wegen $\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t \eta'(s)ds$ gilt die behauptete Beziehung punktweise für alle $f \in D(A_{B,N})$ und damit für alle $f \in E$ aufgrund der Stetigkeit von $(N-M)A_{B,N}$. □

3. Retardierte Cauchyprobleme

Nachdem wir die Halbgruppen $\mathcal{T}_{B,M}$ ausführlich untersucht haben, die durch Störung des Definitionsbereichs des Operators A_B zustande kamen, stellt sich die Frage, ob die Translationseigenschaft erhalten bleibt, über die $\mathcal{T}_B$ definiert wurde (siehe Abschnitt 1) .

Tatsächlich besitzen alle Halbgruppen, die vom Differentialoperator erzeugt werden, diese Eigenschaft.
Ein Beweis für diese Tatsache wurde von Plant (siehe [Pla]) sogar für nichtlineare Halbgruppen erbracht. Der vorliegende Beweis für den linearen Fall geht auf eine Idee von U.Moustakas zurück (vgl. [Gra]) .

Satz 3.1 Sei $(A,D(A))$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf $E = C([-r_o,0],X)$.
Alle $f \in D(A)$ seien stetig differenzierbar und es gelte $Af = f'$ für $f \in D(A)$.
Dann besitzt $\mathcal{T}$ die Translationseigenschaft, d.h.
für alle $t \geq 0$, $s \in [-r_o,0]$, $f \in E$ gilt :

$$T(t)f(s) = \begin{cases} T'(t+s)f(0) & \text{für } t+s \geq 0 \\ f(t+s) & \text{für } t+s \leq 0 \end{cases} .$$

Beweis Es genügt, die Eigenschaft für $f \in D(A)$ nachzuweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle :

(i) Sei $t \geq 0$, $s \in [-r_o, 0]$ und $t+s > 0$.

Für $g \in D(A)$ sei die Funktion

$$h : [-t,0] \longrightarrow X \quad \text{erklärt durch}$$
$$h(r) = T(-r)g(r) \quad , \quad r \in [-t,0] \ .$$

Für $d \neq 0$ ist dann

$$\frac{1}{d}\,(h(r+d) - h(r)) = \frac{1}{d}\,(T(-r-d)g(r+d) - T(-r)g(r))$$

$$= \frac{1}{d}\,(T(-r-d)g(r) - T(-r)g(r)) +$$

$$+ \frac{1}{d}\big[(T(-r-d)g - T(-r)g)(r+d) - (T(-r-d)g - T(-r)g)(r)\big]$$

$$+ \frac{1}{d}\,(T(-r)g(r+d) - T(-r)g(r)) \ .$$

Für $d \longrightarrow 0$ konvergiert der erste Summand gegen $-A\,T(-r)g(r)$, der zweite gegen 0 und der dritte gegen $A\,T(-r)g(r)$.

Somit ist h stetig differenzierbar mit Ableitung 0, also konstant. Insbesondere gilt

$$g(0) = T(0)g(0) = h(0) = h(s) = T(-s)g(s) \ .$$

Für jedes $f \in D(A)$ folgt also mit $g := T(t+s)f$

$$T(t)f(s) = T(-s)T(t+s)f(s) = T(-s)g(s) = g(0)$$
$$= T(t+s)f(0) \ .$$

(ii) Sei $t \geq 0$, $s \in [-r_o, 0]$ und $t+s \leq 0$.
Für $f \in D(A)$ sei die Funktion

$$k : [0,t] \longrightarrow X \qquad \text{erklärt durch}$$
$$k(r) := T(r)f(t+s-r) \quad , \quad r \in [0,t] \ .$$

Analog zu (i) zeigt man: k ist stetig differenzierbar mit Ableitung 0 ,also konstant.
Man erhält

$$f(t+s) = k(0) = k(t) = T(t)f(s) \ .$$

□

Definiert man für $f \in E$ die stetige Funktion

$$u(t) := \begin{cases} T_{B,M}(t)f(0) & , \ t \geq 0 \\ f(t) & , \ t \leq 0 \end{cases} ,$$

und bezeichnet man mit $u_t \in C([-r_o, 0], X)$ die Funktion,die erklärt ist durch

$$u_t(s) := u(t+s) \quad , \quad s \in [-r_o, 0] \ ,$$

so erhält man als Konsequenz der Translationseigenschaft die Beziehung $u_t = T_{B,M}(t)f$.

Ist $f \in D(A_{B,M})$, so ist auch $u_t \in D(A_{B,M})$
und es gilt

$$\dot{u}(t) = (u_t)'(0) = A_{B,M}u_t(0) = Bu(t) + Mu_t \ .$$

In diesem Fall hat u also folgende Eigenschaften:

(i) u ist stetig differenzierbar ,

(ii) $u(t) \in D(B) \quad \forall \; t \geq 0$,

(iii) $\dot{u}(t) = Bu(t) + Mu_t \quad , \; t \geq 0$,

$u_0 = f \in D(A_{B,M})$.

Definition 3.2

Ein System der Form (iii) nennen wir retardiertes Cauchyproblem. Eine Funktion $u : [-r_0, \infty) \longrightarrow X$ heißt Lösung des Problems, falls die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt sind.

Das retardierte Cauchyproblem kann auf das gewöhnliche abstrakte Cauchyproblem (auf dem größeren Raum E)

$$\dot{v}(t) = A_{B,M} v(t)$$
$$v(0) = f \in D(A_{B,M})$$

zurückgeführt werden, da die Lösungen von (iii) ja gerade durch die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ induziert werden.

Zusammenfassend erhalten wir :

Satz 3.3 Das retardierte Cauchyproblem (iii) hat für alle $f \in D(A_{B,M})$ eine eindeutige Lösung u, welche durch die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ in folgender Weise gegeben ist :

$$u(t) := \begin{cases} T_{B,M}(t)f(0) & t \geq 0 \\ f(t) & t \leq 0 \end{cases} .$$

Beweis

Die Existenz der Lösung geht aus den obigen Überlegungen hervor. Für die Eindeutigkeit betrachten wir zwei Lösungen u und v des retardierten Cauchyproblems mit $u_o = f = v_o$. Dann ist $w := u - v$ eine Lösung zu $w_o = 0$. Setze $x(t) := w_t$. Dann ist $x(t) \in C^1([-r_o,0],X)$ für alle $t \geq 0$ und wegen $w'_t(0) = \dot{w}(t) = Bw(t) + Mw_t$ ist $x(t)$ sogar aus $D(A_{B,M})$.

Nun gilt

$$\frac{d}{dt}x(t)(s) = \lim_{h \to o} \frac{1}{h} (w_{t+h}(s) - w_t(s))$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{1}{h} (w_t(h+s) - w_t(s)) = \dot{w}_t(s) ,$$

daher ist $\frac{d}{dt}x(t) = w'_t = A_{B,M}w_t = A_{B,M}x(t)$.

Da weiter $x(0) = w_o = 0$ gilt, ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit des abstrakten Cauchyproblems $x(t) = 0$, also $v = u$. □

Aus (iii) kann man eine wichtige Darstellung für die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ herleiten.
Setzt man für $f \in D(A_{B,M})$, $t \geq 0$

$$h(t) := MT_{B,M}(t)f \quad ,$$

so erfüllt die Lösung u von (iii) folgendes inhomogene Cauchyproblem in X :

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + h(t) \quad , \quad t \geq 0$$
$$u(0) = f(0) \in D(B) \quad .$$

Die bekannte Lösungsformel liefert daher

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)h(s)ds \qquad \text{oder}$$

$$(3.1) \quad T_{B,M}(t)f(0) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)MT_{B,M}(s)f \, ds \quad ,$$

da die Funktion h für $f \in D(A_{B,M})$ stetig differenzierbar ist (vgl. [Paz1], 4.2.5) .

III Spektraltheorie und Asymptotik

Wir betrachten weiterhin die in Kapitel II beschriebene Situation unter den gleichen Voraussetzungen.

Nach Satz II,2.4 ist das Spektrum des Generators $A_{B,M}$ bestimmt durch die Beziehung

$$\lambda \in \sigma(A_{B,M}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(B+M_\lambda) \quad .$$

Will man daraus Aussagen über das asymptotische Verhalten der Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ beziehungsweise der Lösungen des zugehörigen retardierten Cauchyproblems machen, steht man vor zwei Problemen :

(i) Man muß die Spektren der ganzen Operatorfamilie $(B+M_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ diskutieren. Im Falle $\dim X < \infty$ führt dies zur Untersuchung der Nullstellen der sogenannten "charakteristischen Gleichung"

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda - (B+M_\lambda)] \quad .$$

Dies sind transzendente Gleichungen, die nur in Spezialfällen analytisch lösbar sind.

(ii) Selbst wenn das Spektrum abgeschätzt werden kann, ist im allgemeinen kein direkter Schluß auf das Spektrum der Halbgruppe möglich, welches bekanntlich das asymptotische Verhalten bestimmt (siehe etwa [Zab], [Gre3], [Mol]) .

Wir werden also in diesem Kapitel im Abschnitt 3 die Ordnungseigenschaften der Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ untersuchen und zeigen, daß sich im Falle von positiven Halbgruppen das Problem (i) auf die Untersuchung des Spektrums eines einzigen Operators reduziert. In Abschnitt 2 geben wir Regularitätsbedingungen an die Halbgruppen $\mathcal{T}_{B,M}$ an, welche den spektralen Abbildungssatz implizieren.
In Abschnitt 4 wenden wir die gewonnenen Ergebnisse an,um zu zeigen, in welchen Fällen die Stabilität nicht von der Verzögerung beeinflußt wird.
Zunächst aber geben wir einige Definitionen und Resultate zu diesem Problemkreis an.

1 Stabilität : Definitionen und Resultate

Definition 1.1 Sei $(A,D(A))$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf einem Banachraum X .

(i) $w(x) := \inf\{w: \exists M\ ,\ \|T(t)x\| \le Me^{wt}\ \forall t \ge 0\}$
heißt Wachstumsschranke von $T(t)x$.

(ii) $w_1 = w_1(A) := \sup\{w(x): x \in D(A)\}$
heißt Wachstumsschranke der Lösungen des Cauchyproblems .

(iii) $w_0 = w_0(A) := \sup\{w(x): x \in X\}$
heißt Wachstumsschranke der Halbgruppe .

Wir nennen die Halbgruppe

(iv) gleichmäßig exponentiell stabil, falls $w_0 < 0$,

(v) exponentiell stabil, falls $w_1 < 0$.

Für eine ausführliche Diskussion dieser und anderer Stabilitätsbegriffe siehe [Nag1], A-IV, Sect.1 .

Im Falle dim $X < \infty$ ist nach den bekannten Ljapunov-schen Resultaten das Wachstum der Lösungen durch das Spektrum des Generators bestimmt.
Definiert man die Spektralschranke $s(A)$ durch

$$s(A) := \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A) \} ,$$

so gilt hier

$$s(A) = w_1 = w_0 .$$

Im unendlichdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nur

$$s(A) \leq w_1 \leq w_0 ,$$

wie die Beispiele in [Zab] , [Gre3] und [Vol] zeigen.

Um stärkere Aussagen treffen zu können, muß man im allgemeinen Regularitäts- oder Ordnungseigenschaften der Halbgruppe ausnützen. Die beiden nächsten Resultate beschreiben die Situation.
Für Beweise und Anwendungen verweisen wir auf [Nag1] .

Satz 1.1 Sei $(A, D(A))$ Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf dem Banachraum X .
Ist die Abbildung $t \longmapsto T(t)$ normstetig für $t > t_0$, so gilt

$$s(A) = w_1 = w_0 .$$

Bemerkung 1.2 Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die Normstetigkeit von $\mathcal{T}$ für $t > t_o$:

(i) $T(t_o)$ ist kompakt ,

(ii) $t \longmapsto T(t)$ ist differenzierbar für $t > t_o$,

(iii) $\mathcal{T}$ ist analytisch ,

Satz 1.3 Sei $(A, D(A))$ der Generator einer positiven Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf einem geordneten Banachraum X mit normalem erzeugenden Kegel .
Dann gilt:

(i) $s(A) = w_1 \in \sigma(A)$.

(ii) Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt

a) $X = L^1(\mu)$

b) $X = L^2(\mu)$

c) X hat Ordnungseins oder ist α-gerichtet (z.B. $C_o(X)$) ,

so gilt

$$s(A) = w_1 = w_o \in s(A) \quad .$$

2. Regularität

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Regularitätseigenschaften der von B auf X erzeugten Halbgruppe $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{T}_{B,M}$ übertragen werden können. Das erste Resultat betrifft die Normstetigkeit .

Satz 2.1 Ist $\mathcal{S}$ normstetig für $t > 0$, so ist $\mathcal{T}_{B,M}$ normstetig für $t > r_o$.

Beweis

(i) Zunächst definieren wir Operatoren

$$\tilde{T}(t) : \quad E \longrightarrow X \qquad \text{durch}$$

$$\tilde{T}(t)f := \int_0^t S(t-s)MT_{B,M}(s)f \, ds \qquad \text{und}$$

zeigen, daß die Abbildung $t \longmapsto \tilde{T}(t) \in \mathcal{L}(E,X)$ auf $(0,\infty)$ normstetig ist.

Für $t > 0$, $h > 0$ und $0 < d < t$ hat man

$$\tilde{T}(t+h) - \tilde{T}(t) = \int_0^{t+h} S(t+h-s)MT_{B,M}(s)ds - \int_0^t S(t-s)MT_{B,M}(s)ds$$

$$= \int_0^{t-d} (S(t+h-s)-S(t-s))MT_{B,M}(s)ds + \int_{t-d}^{t+h} S(t+h-s)MT_{B,M}(s)ds$$

$$- \int_{t-d}^{t} S(t-s)MT_{B,M}(s)ds \qquad .$$

Die Mengen $\{S(s): 0 \leq s \leq 2t\}$ und $\{T_{B,M}(s): 0 \leq s \leq 2t\}$ sind beschränkt in der Operatornorm. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $d > 0$, so daß für $0 < h < d$ die Normen der beiden letzten Integrale $< \frac{\varepsilon}{3}$ werden. Für dieses d geht das erste Integral für $h \longrightarrow 0$ in der Operatornorm gegen 0, da $s \longmapsto S(s)$ normstetig auf $(0,\infty)$ und daher gleichmäßig stetig auf $[d,2t]$ ist.

(ii) Sei nun $t > r_0$, $0 < h < t$.

Dann gilt

$$\| T_{B,M}(t+h)f - T_{B,M}(t)f \| = \sup_{s\in[-r_0,0]} \| T_{B,M}(t+h)f(s) - T_{B,M}(t)f(s) \|$$

$$\overset{a)}{=} \sup_{s\in[-r_0,0]} \| T_{B,M}(t+h+s)f(0) - T_{B,M}(t+s)f(0) \|$$

$$\overset{b)}{=} \sup_{s\in[-r_0,0]} \| S(t+h+s)f(0) + \tilde{T}(t+h+s)f - S(t+s)f(0) - \tilde{T}(t+s)f \|$$

$$\leq \sup_{s\in[-r_0,0]} \| S(t+h+s) - S(t+s) \| \|f\|$$

$$+ \sup_{s\in[-r_0,0]} \| \tilde{T}(t+h+s) - \tilde{T}(t+s) \| \|f\| \quad .$$

Beide Summanden gehen nun für $h \to 0$ nach Null, da die Abbildungen $t \longmapsto S(t)$ und $t \longmapsto \tilde{T}(t)$ im Intervall $[t-r_0,2t]$ gleichmäßig normstetig sind.

Für a) wurde die Translationseigenschaft II,3.1 benutzt, für b) die Darstellung II,(3.1). □

Bemerkung 2.2 Die Voraussetzung der Normstetigkeit f
von $\mathcal{S}$ kann nicht durch die schwächere Bedingung
der Normstetigkeit für $t > t_o$ ersetzt werden.
Es gibt Beispiele für Halbgruppen $\mathcal{S}$,die für $t > 1$
normstetig sind,während die durch einen speziellen
linearen stetigen Operator M_o gestörte Halbgruppe $\tilde{\mathcal{S}}$
nicht irgendwann normstetig ist (siehe [Phi]) .
Diese Beispiel läßt sich auf unsere Situation übertragen,wenn man

$$Mf := M_o f(0) \qquad \text{setzt.}$$

Denn wegen $T_{B,M}(t)f(0) = S(t)f(0)$ ist $\mathcal{T}_{B,M}$
in diesem Fall nicht irgendwann normstetig .

Ist die Halbgruppe $\mathcal{S}$ analytisch, kann man auch die Differenzierbarkeit der Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ nachweisen. Wir verwenden dabei die Charakterisierung differenzierbarer Halbgruppen aus [Paz1] .

Satz 2.3 Die Halbgruppe $\mathcal{S}$ sei analytisch. Dann ist $\mathcal{T}_{B,M}$ differenzierbar für $t > t_o$.

Beweis OBdA kann $\mathcal{S}$ als beschränkte Halbgruppe angenommen werden (sonst betrachte B-w für geeignetes w) und es gilt

$$\|R(\lambda,B)\| \le \frac{c}{|\lambda|} \le \frac{c}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} \quad \text{für } \lambda \in W ,$$

wobei die Menge W gegeben ist durch

$$W := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda| \le \alpha + \frac{\pi}{2}\}$$

mit geeigneten Konstanten $c > 0$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Man hat die Abschätzung

$$\|R(\lambda,B)L_\lambda\| \le \frac{c}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\|L\|e^{-r_o \mathrm{Re}\lambda} \le c\|L\|e^{a}e^{r_o \mathrm{Re}\lambda}e^{-r_o \mathrm{Re}\lambda} ,$$

falls $\lambda \in R := \{\lambda \mid |\mathrm{Im}\,\lambda| \ge e^{a}e^{-r_o \mathrm{Re}\lambda}\} \subset W$.
Dabei ist r_o die Länge der Zeitverzögerung (vgl.(2.2)).
Wird a groß genug gewählt, wird der Ausdruck $< \frac{1}{2}$, daher existiert die Resolvente $R(\lambda,B+L_\lambda)$ und

$$\|R(\lambda,B+L_\lambda)\| \le 2 \quad \text{für alle } \lambda \in R , \mathrm{Re}\lambda \le \omega(A_{B,M}) .$$

wegen $\|H_\lambda\| \leq \|\varepsilon_\lambda\| \leq \max(e^{-r_o \operatorname{Re}\lambda}, 1)$ hat man somit

$$\|R(\lambda, A_{B,M})\| \leq \|R(\lambda, B+M_\lambda)\,(1+M H_\lambda)\|\,\|\varepsilon_\lambda\| + \|H_\lambda\| \leq C\,|\operatorname{Im}\lambda|^2 \leq C\,|\lambda|^2$$

für ein geeignetes C und für alle $\lambda \in R$, $\operatorname{Re}\lambda \leq \omega(A_{B,M})$.
Nach [Paz1] existiert daher ein t_o , so daß
$\mathcal{T}_{B,M}$ für $t > t_o$ differenzierbar ist . □

Als nächstes wenden wir uns Kompaktheitseigenschaften der betrachteten Operatoren zu. Zunächst untersuchen wir, welchen Einfluß die Kompaktheit der Resolvente von B auf die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ besitzt .

Satz 2.4 Hat der Operator B kompakte Resolvente, so ist für alle $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$ der Operator $R(\lambda, A_{B,M}) T_{B,M}(r_o)$ kompakt. Dabei gibt r_o die Größe der Verzögerung an (vgl. II, Abschnitt 2) .

Beweis U bezeichne die Einheitskugel in E .
Für geeignetes μ existiert

$$R(\mu, B+M_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (R(\mu, B) M_\mu)^n R(\mu, B) \quad \text{und ist kompakt.}$$

Daher ist die Menge

$$\{R(\mu, A_{B,M}) f(0) \mid f \in U\} = \{R(\mu, B+M_\mu)(f(0)+MH_\mu f) \mid f \in U\}$$

relativ kompakt in X und wegen der Translationseigenschaft (II,3.1) gilt das Gleiche für die

Mengen

$$\{R(\mu,A_{B,M})T_{B,M}(r_o)f(s) \mid f\in U\} = \{R(\mu,A_{B,M})T_{B,M}(r_o+s)f(0) \mid f\in U\}$$

für alle $s\in[-r_o,0]$.

Weiter ist die Menge $\{R(\mu,A_{B,M})T(r_o)f \mid f\in U\}$ gleichstetig,da

$$\| \frac{d}{ds}(R(\mu,A_{B,M})T_{B,M}(r_o)f)\| \leq \|A_{B,M}R(\mu,A_{B,M})T_{B,M}(r_o)\|$$

für alle $f\in U$. Daher ist nach dem Satz von Arzela-Ascoli die Menge $\{R(\mu,A_{B,\cdot})T_{B,M}(r_o)U\}$ relativ kompakt in E .
Die Behauptung folgt nun für alle $\lambda\in\varrho(A_{B,M})$ aus der Resolventengleichung

$$R(\lambda,A_{B,M})T_{B,M}(r_o) = R(\mu,A_{B,M})T(r_o) + (\mu-\lambda)R(\mu,A_{B,\cdot})R(\lambda,A_{B,\cdot})T_{B,M}(r_o) .$$

□

Zusammen mit Satz 2.1 erhält man auf anderem Wege das bekannte Resultat aus [Tra] :

Korollar 2.5 Ist die Halbgruppe $\mathcal{S}$ kompakt für $t > 0$, so ist $\mathcal{T}_{B,M}$ kompakt für $t > r_o$.

Beweis Ist $\mathcal{S}$ kompakt für $t > 0$,so ist nach [Paz1] $R(\lambda,B)$ kompakt und $\mathcal{S}$ normstetig für $t > 0$. Nach Satz 2.1 ist daher $\mathcal{T}_{B,M}$ normstetig für $t > r_o$, außerdem ist $R(\lambda,A_{B,M})T_{B,M}(r_o)$ kompakt wegen Satz 2.4 . Daher ist nach [Paz1] die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ kompakt für $t > r_o$. □

Für die Anwendung auf Systeme von Funktionaldifferentialgleichungen wichtig ist der Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$.

Korollar 2.6 Ist X endlichdimensional, so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ kompakt für $t > r_o$.

Die bisher angegebenen Resultate sichern die Normstetigkeit der Halbgruppe für $t > r_o$ und erlauben somit aufgrund von Satz1.1 asymptotische Aussagen über $\mathcal{T}_{B,M}$ aus dem Spektrum von $A_{B,M}$ herzuleiten.
Die folgenden Ergebnisse dienen dem gleichen Zweck,stellen jedoch keine Regularitätsforderungen an die Halbgruppe $\mathcal{S}$,sondern an die Störung M .
Dabei verwenden wir die Ergebnisse aus [Gre1] , insbesondere die Darstellung in Satz II,2.6 .

Zunächst ein häufig benutztes Lemma (Lemma 1.6 in [Gre1]).

Lemma 2.7 Sind $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ stark stetige Halbgruppen auf einem Banachraum E und ist $K \in \mathcal{L}(E)$ ein kompakter Operator, so ist

$$\int_0^t T(t-s)KS(s)ds \qquad \text{kompakt für alle } t > 0.$$

Damit ergibt sich ein für die Anwendungen nützliches Störungsresultat.

Satz 2.8 Der Operator $K := (N - M)(\lambda - A_{B,N})$ sei stetig für ein $\lambda \in \varrho(A_{B,N})$.
Ist K kompakt oder ist $R(\lambda,B)$ kompakt, so ist

$$K(t) := T_{B,N}(t) - T_{B,M}(t) \quad \text{kompakt für all } t > 0.$$

Beweis Nach Satz II,2.6 gilt die Beziehung

$$T_{B,N}(t) - T_{B,M}(t) = D_\lambda(M)(N-M)T_{B,N}(t) - T_{B,M}(t)D_\lambda(M)(N-M)$$
$$+ \int_0^t T_{B,M}(t-s)D_\lambda(M)(N-M)(\lambda-A_{B,N})T_{B,N}(s)\,ds .$$

(i) Ist nun K kompakt, so auch $N-M = KR(\lambda,A_{B,N})$.

(ii) Ist $R(\lambda,B)$ kompakt, so gilt das Gleiche für

den Operator $R(\lambda, B+M_\lambda)$ und damit auch für

$$D_\lambda(M): \quad u \longmapsto \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda, B+M_\lambda)u \quad .$$

In beiden Fällen sind die beiden ersten Summanden kompakt und die Kompaktheit des dritten folgt aus Lemma 2.6. □

In dieser Situation ist das essentielle Spektrum der beiden Halbgruppen gleich. Dabei ist das essentielle Spektrum eines abgeschlossenen, linearen Operators A erklärt durch

$$\sigma_{ess}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim \ker(\lambda - A) = \dim E/\mathrm{im}(\lambda - A)\}$$

Korollar 2.9 Der Operator $K := (N - M)(\lambda - A_{B,N})$ sei stetig für ein $\lambda \in \varrho(A_{B,N})$.
Ist K kompakt oder $R(\lambda, B)$ kompakt , so gilt

$$\sigma_{ess}(T_{B,M}(t)) = \sigma_{ess}(T_{B,N}(t)) \quad \text{für} \quad t > 0 \, .$$

Beweis Die Operatoren unterscheiden sich nach Satz 2.8 nur durch einen kompakten Operator. Daher stimmt das essentielle Spektrum überein (vgl. [Kat] ,IV.5.26). □

Für das asymptotische Verhalten hat das folgende Konsequenzen:

Korollar 2.10 Der Operator $K := (N-M)(\lambda - A_{B,N})$ sei stetig für ein $\lambda \in \varrho(A_{B,N})$.
Sei K kompakt oder $R(\lambda, B)$ kompakt .
Ist dann $\mathcal{T}_{B,M}$ gleichmäßig exponentiell stabil mit
$\| T_{B,M}(t) \| \leq Ce^{-wt}$, C , $w > 0$,
so ist $\mathcal{T}_{B,N}$ quasikompakt und es gelten folgende Aussagen:

(i) Es gibt eine Zerlegung

$$E = E_1 \oplus E_2 \qquad \text{in } \mathcal{T}_{B,N}\text{-invariante}$$

Räume mit den Eigenschaften :

a) $T_{B,N}(t) = T_1(t) + T_2(t)$, wobei $T_i(t)$,i= 1,2 die Einschränkung von $T_{B,N}(t)$ auf E_i bezeichnet.

b) $\dim E_2 < \infty$.

c) $\omega(\mathcal{T}_1) \leq -w$.

(ii) Ist $s(A_{B,N}) < 0$, so ist $\mathcal{T}_{B,N}$ gleichmäßig exponentiell stabil.

Beweis Die Quasikompaktheit von $\mathcal{T}_{B,N}$ folgt unmittelbar aus Satz 2.8 . Alle anderen Aussagen sind bekannte Eigenschaften quasikompakter Halbgruppen,die auf der üblichen Spektralzerlegung beruhen (siehe z.B. B-IV,Sect.2 in [Nag1]) .

□

In dieser Situation kann man auch die Regulatitäts-bedingung an $\mathcal{S}$ in Korollar 2.5 abschwächen.

Satz 2.11 Der Operator MA_B sei stetig. Ist dann $\mathcal{S}$ kompakt für $t > t_o$ und $R(\lambda,B)$ kompakt, so ist $\mathcal{T}_{B,M}$ kompakt für $t > t_o+r_o$.

Beweis

Nach Satz 2.8 ist $K(t) := T_{B,M}(t) - T_B(t)$ kompakt für alle $t > 0$.
Wir müssen also nur die Kompaktheit von $\mathcal{T}_B$ zeigen .
Sei also $t > t_o+r_o$.
(i) Die Menge $\{ T_B(t)f \mid \|f\| \leq 1 \}$ ist gleichstetig.
Denn $\| T_B(t)f(s+h) - T_B(t)f(s) \|$

$$= \| S(t+h+s)f(0) - S(t+s)f(0) \|$$
$$\leq \| S(t+h+s) - S(t+s) \| \quad .$$

Dieser Ausdruck geht gegen Null für $h \longrightarrow 0$,
da $\mathcal{S}$ normstetig für $t > t_o$ ist.

(ii) Die Menge

$$\{ T_B(t)f(s) \mid \|f\| \leq 1 \} = \{ S(t+s)f(0) \mid \|f\| \leq 1 \}$$

ist kompakt für alle $s \in [-r_o, 0]$.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist somit die Menge $\{ T_B(t)f \mid \|f\| \leq 1 \}$ kompakt in E .

□

3. Positivität

Als ungemein nützlich zur Untersuchung der Stabilität der betrachteten Halbgruppen $\mathcal{T}_{B,M}$ erweist sich der Begriff der Dominanz .

Definition 3.1 Sei E ein Banachverband und T_1 , $T_2 \in \mathfrak{L}(E)$. Wir sagen T_1 dominiert T_2 , falls für alle $f \in E$ gilt :

$$|T_2 f| \leq T_1 |f| \quad .$$

Sind $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Halbgruppen ,so sagen wir $\mathcal{T}_1$ dominiert $\mathcal{T}_2$, falls $T_1(t)$ den Operator $T_2(t)$ für alle $t > 0$ dominiert .

Folgende Eigenschaften ergeben sich unmittelbar:

Lemma 3.2 Sei E ein Banachverband , S_i , T_i , $i=1,2$ stetige , lineare Operatoren auf E .
S_1 dominiere S_2 , T_1 dominiere T_2 . Dann gelten folgende Aussagen:
(i) $S_1 \geq 0$.
(ii) $S_1 T_1$ dominiert $S_2 T_2$.
(iii) S_1^n dominiert S_2^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Dominanz von Halbgruppen ist äquivalent zur Dominanz der zugehörigen Resolventen.

Lemma 3.3 Sei E ein Banachverband, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ stark stetige Halbgruppen auf E mit Generatoren A_1 und A_2.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathcal{T}_1$ dominiert $\mathcal{T}_2$

(ii) Es existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so daß $R(\lambda, A_1)$ den Operator $R(\lambda, A_2)$ für alle $\lambda > \lambda_0$ dominiert.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $\lambda > \max(w_0(A_1), w_0(A_2))$, sei $f \in E$.
Dann ist

$$|R(\lambda, A_2)f| = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_2(t) f \, dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} |T_2(t)f| dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_1(t)|f| dt = R(\lambda, A_1)|f| .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Nach Lemma 3.2,(iii) wird für alle $n \in \mathbb{N}$ $R(\lambda, A_2)^n$ von $R(\lambda, A_1)^n$ dominiert. Daher gilt

$$|T_2(t)f| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{t} R(\tfrac{n}{t}, A_2)^n f \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{t} R(\tfrac{n}{t}, A_1)^n |f| = T_1(t)|f| .$$

□

Wir wollen dies auf die Halbgruppen $\mathcal{T}_{B,M}$ anwenden. Sei also im weiteren X ein Banachverband; damit ist auch $E = C([-r_0,0],X)$ in kanonischer Weise ein Banachverband. Wir betrachten stark stetige Halbgruppen $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ mit Generatoren B_1, B_2 auf X, sowie stetige lineare Operatoren M_1, M_2 von E nach X.

Satz 3.4 Unter den obigen Voraussetzungen sei $\mathcal{S}_1$ eine Dominante von $\mathcal{S}_2$ und M_1 dominiere M_2. Dann dominiert $\mathcal{T}_{B_1,M_1}$ die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B_2,M_2}$.

Beweis Für $\lambda \in \mathbb{R}$ dominiert $M_{1\lambda}$ den Operator $M_{2\lambda}$. Für $u \in X$ und großes λ gilt daher

$$|R(\lambda,B_2+M_{2\lambda})u| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty}[R(\lambda,B_2)M_{2\lambda}]^n R(\lambda,B_2)\,u\Big|$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}[R(\lambda,B_1)M_{1\lambda}]^n R(\lambda,B_1)|u| = R(\lambda,B_1+M_{1\lambda})|u|.$$

Weiter ist der Operator H_λ aus II,(1.3) positiv und man erhält für $f \in E$:

$$\begin{aligned}|R(\lambda,A_{B_2,M_2})f| &= |\varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B_2+M_{2\lambda})(f(0)+M_2H_\lambda f) + H_\lambda f|\\ &\leq \varepsilon_\lambda \otimes |R(\lambda,B_2+M_{2\lambda})(f(0)+M_2H_\lambda f)| + |H_\lambda f|\\ &\leq \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B_1+M_{1\lambda})|f(0)+M_2H_\lambda f| + H_\lambda|f|\\ &\leq \varepsilon_\lambda \otimes R(\lambda,B_1+M_{1\lambda})(f(0) + M_1H_\lambda|f|) + H_\lambda|f|\\ &= R(\lambda,A_{B_1,M_1})|f|.\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.3 folgt nun die Behauptung. □

Korollar 3.5 Für die von B_1 , B_2 erzeugten Halbgruppen gelte $0 \leq \mathcal{S}_2 \leq \mathcal{S}_1$ und außerdem sei $0 \leq M_2 \leq M_1$.
Dann gilt auch

$$0 \leq \mathcal{T}_{B_2,M_2} \leq \mathcal{T}_{B_1,M_1} \quad .$$

Beweis Wegen der Positivität von $\mathcal{S}_2$ und M_2 gilt für alle $u \in X$ und alle $f \in E$:

$$|S_2(t)u| \leq S_2(t)|u| \leq S_1(t)|u| \quad \text{und}$$
$$|M_2 f| \leq M_2|f| \leq M_1|f| \quad .$$

Also gilt nach Satz 3.4

$$0 \leq |T_{B_2,M_2}(t)f| \leq T_{B_2,M_2}(t)|f| \leq T_{B_1,M_1}(t)|f| \quad .$$

□

Insbesondere gilt

Korollar 3.6 Ist B Generator einer positiven Halbgruppe und ist M positiv , so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ positiv .

Diese hinreichenden Bedingungen sind im allgemeinen nicht notwendig,da die "Zerlegung der Randbedingung" in B und M nicht eindeutig ist .

Beispiel 3.6 Sei $X := \mathbb{R}^2$,

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Mf := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(0) \quad \text{für} \quad f \in E \ .$$

Die von B erzeugte Halbgruppe ist nicht positiv, andererseits ist

$$D(A_{B,M}) = \{ f \in E \mid f \text{ stetig differenzierbar }, \ f'(0) = Bf(0) + Mf = f(0) \} = D(A_{Id,0}),$$

also ist $A_{B,M} = A_{Id,0}$. Dieser Operator erzeugt nach Korollar 3.5 eine positive Halbgruppe.

Erzwingt man jedoch die Eindeutigkeit der Zerlegung, so erweisen sich die Bedingungen auch als notwendig.

Definition 3.7 Ein Operator $M \in \mathcal{L}(E,X)$ hat keine Masse in 0 ,falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in E$ mit $\operatorname{sppt}(f) \subset [-\delta, 0]$ gilt $\|Mf\| < \varepsilon \|f\|$.

Beispiel 3.8 Im Falle $X := \mathbb{R}^n$ läßt sich jedes $M \in \mathcal{L}(E,X)$ eindeutig zerlegen in einen in 0 atomaren Anteil M_0 und einen Rest $\widetilde{M}$,der keine Masse in 0 besitzt .

Satz 3.9 Es seien $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ stark stetige Halbgruppen auf X mit Generatoren B_1 , B_2 . Haben M_1 , $M_2 \in \mathcal{L}(E,X)$ keine Masse in 0 , so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T}_{B_1,M_1}$ dominiert $\mathcal{T}_{B_2,M_2}$.

(ii) $\mathcal{S}_1$ dominiert $\mathcal{S}_2$ und

$\mathcal{M}_1$ dominiert $\mathcal{M}_2$.

Beweis

(ii) $\Rightarrow$ (i) wurde in Satz 3.4 gezeigt .

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

a) Annahme: M_1 dominiert nicht M_2 .

Dann existiert ein $g \in E$ mit

$$u := M_1|g| - |M_2 g| \notin X_+ \quad .$$

OBdA kann $g(0) = 0$ gewählt werden. Sonst nehme $g_\delta \in E$ mit $g_\delta(s) := \begin{cases} g(s) & \text{für } -r_0 \le s \le \delta \\ \frac{g(\delta)}{\delta}\, s & \text{für } \delta < s \le 0 \end{cases}$.

Dann ist $g_\delta(0) = 0$ und $\operatorname{sppt}(g_\delta - g) \subset [\delta, 0]$.

Sei $v := M_1|g_\delta| - |M_2 g_\delta|$. Dann ist

$$\|u - v\| \le \|M_1|g| - M_1|g_\delta|\| + \| |M_2 g_\delta| - |M_2 g| \|$$

$$= \|M_1(|g| - |g_\delta|)\| + \|M_2(g_\delta - g)\| < 2\varepsilon$$

für geeignetes δ , da M_1 und M_2 keine Masse in 0 haben. Also ist auch $v \notin X_+$.

Für $g(0) = 0$ konvergiert aber $\lambda H_\lambda g$ gegen g für $\lambda \longrightarrow \infty$. Somit erhält man

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 R(\lambda, B_1+M_{1\lambda})(|g(0)| + M_1 H_\lambda |g|) = M_1|g| \quad \text{und}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} |\lambda^2 R(\lambda, B_2+M_{2\lambda})(\, g(0) + M_2 H_\lambda g\,)| = |M_2 g|\ ,$$

da für große λ $\lambda \| R(\lambda, B_i+M_{i\lambda}) \|$ beschränkt ist und $\lambda R(\lambda, B_i+M_{i\lambda})$ für λ nach ∞ in der starken Operatortopologie gegen die Identität konvergiert.

Folglich ist

$$(R(\lambda, A_{B_1,M_1})|g| - |R(\lambda, A_{B_2,M_2})g|)(0) =$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\left[\lambda^2 R(\lambda, B_1+M_{1\lambda})(|g(0)| + M_1 H_\lambda |g|) - |\lambda^2 R(\lambda, B_2+M_{2\lambda})(g(0)+M_2 H_\lambda g)|\right]$$

nicht in X_+ , da der Ausdruck in der Klammer für $\lambda \longrightarrow \infty$ gegen u konvergiert.

Dies ist wegen Lemma 3.3 ein Widerspruch zur Dominanz von $\mathcal{T}_{B_1,M_1}$ über $\mathcal{T}_{B_2,M_2}$.

b) Für große $\mu \in \mathbb{R}$ erklären wir v_μ aus X_+ durch

$$v_\mu := (R(\lambda, A_{B_1,M_1})|u\otimes\varepsilon_\mu| - |R(\lambda, A_{B_2,M_2})(u\otimes\varepsilon_\mu)|)(0) \ .$$

Da für $\mu \longrightarrow \infty$ $H_\lambda(u\otimes\varepsilon_\mu)$ gegen 0 konvergiert, ist somit auch

$$v := R(\lambda, B_1+M_{1\lambda})|u| - |R(\lambda, B_2+M_{2\lambda})\, u| \in X_+ \ ,$$

also wird $R(\lambda, B_2+M_{2\lambda})$ von $R(\lambda, B_1+M_{1\lambda})$ dominiert.

$M_{i\lambda}$ konvergiert gegen 0 für λ nach ∞ $(i=1,2)$, da die Operatoren M_i keine Masse in 0 besitzen. Es existieren daher λ_0, $C > 0$, so daß für alle $\lambda > \lambda_0$

$$\| R(\lambda, B_i + M_{i\lambda}) \| \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad .$$

Damit existiert für $(1-C^{-1})\lambda < \mu < \lambda$ die Summe

$$R(\lambda, B_i + M_{i\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R(\lambda, B_i + M_{i\lambda})^{n+1} \quad \text{und}$$

wegen Lemma 3.2 wird $R(\mu, B_2 + M_{2\lambda})$ von $R(\mu, B_1 + M_{1\lambda})$ dominiert. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Aussage für alle μ, λ mit $\lambda_0 < \mu \leq \lambda$.

Schließlich gilt für jedes feste $\mu > \lambda_0$

$$R(\mu, B_i) = \lim_{\lambda \to \infty} R(\mu, B_i + M_{i\lambda}) \quad ,$$

daher wird $R(\mu, B_2)$ von $R(\mu, B_1)$ dominiert, was die Dominanz von $\mathcal{G}_1$ über $\mathcal{G}_2$ impliziert . □

Analog zu den Korollaren 3.5 und 3.6 zieht man die Folgerungen:

Korollar 3.10 Es seien $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ stark stetige Halbgruppen auf X . Haben M_1 , M_2 aus $\mathcal{L}(E,X)$ keine Masse in 0 ,so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $0 \leq \mathcal{T}_{B_2,M_2} \leq \mathcal{T}_{B_1,M_1}$

(ii) $0 \leq \mathcal{S}_2 \leq \mathcal{S}_1$ und $0 \leq M_2 \leq M_1$.

Korollar 3.11 Es sei $\mathcal{S}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator B . Hat $M \in \mathcal{L}(E,X)$ keine Masse in 0 ,so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T}_{B,M}$ ist positiv

(ii) $\mathcal{S}$ ist positiv und M ist positiv .

Wir wenden uns nun der Frage zu,ob es eine kleinste stark stetige Halbgruppe gibt,die $\mathcal{T}_{B,M}$ dominiert.

Definition 3.12 Sei E ein Banachverband, $\mathcal{T}$ eine stark stetige Halbgruppe auf E.
Eine stark stetige Halbgruppe $\tilde{\mathcal{T}}$ heißt Betragshalbgruppe von $\mathcal{T}$,falls gilt:

(i) $\tilde{\mathcal{T}}$ dominiert $\mathcal{T}$.

(ii) Jede stark stetige Halbgruppe,welche $\mathcal{T}$ dominiert, dominiert auch $\tilde{\mathcal{T}}$.

Bemerkung 3.13

(i) Existiert eine Betragshalbgruppe,so ist sie offenbar eindeutig bestimmt.

(ii) Die Definition 3.12 setzt weder den Banachverband E als vollständig noch die Halbgruppe $\mathcal{T}$ als Halbgruppe regulärer Operatoren voraus,wie in der in [Der] betrachteten Situation.

Dort stimmen jedoch die Definitionen überein. Existiert nämlich der Betrag $|T| := T \vee -T$ in $\mathcal{L}(E)$, so ist $|T|$ der kleinste Operator,der T dominiert.

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{H}$ aller Halbgruppen $\mathcal{T}_{C,N}$, die zu retardierten Cauchyproblemen gehören, wobei wir voraussetzen, daß der Operator N keine Masse in 0 besitzt.

Satz 3.15 Sei $\mathcal{S}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator B auf einem Banachverband X. Der Operator $M \in \mathcal{L}(E,X)$ besitze keine Masse in 0. Existieren die Betragshalbgruppe $\tilde{\mathcal{S}}$ von $\mathcal{S}$ mit Generator $\tilde{B}$, sowie der Operator $|M|$, so gilt:

(i) $\mathcal{T}_{\tilde{B},|M|}$ dominiert $\mathcal{T}_{B,M}$,

(ii) Dominiert eine Halbgruppe $\mathcal{T}_{C,N} \in \mathcal{H}$ die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$, so wird auch $\mathcal{T}_{\tilde{B},|M|}$ von $\mathcal{T}_{C,N}$ dominiert.

Beweis (i) folgt aus Satz 3.9.

(ii) Die Operatoren M und N haben keine Masse in 0. Wird also $\mathcal{T}_{B,M}$ von $\mathcal{T}_{C,N}$ dominiert, so gilt nach Satz 3.9 für die von C erzeugte Halbgruppe $\mathcal{R}$:

a) $\mathcal{R}$ dominiert $\mathcal{S}$,

außerdem gilt

b) N dominiert M.

Aus der Definition der Betragshalbgruppe (Definition 3.12) bzw. des Betrags (Bemerkung 3.13,ii) folgt nun:

a′) $\mathfrak{R}$ dominiert $\tilde{\mathfrak{F}}$ und

b′) N dominiert $|M|$.

Wiederum nach Satz 3.9 folgt daraus die Dominanz von $\mathcal{T}_{C,N}$ über $\mathcal{T}_{\tilde{B},|M|}$. □

Bemerkung 3.16 Satz 3.15 (ii) besagt, daß es in der Klasse $\mathcal{H}$ keine $\mathcal{T}_{B,M}$ dominierende Halbgruppe gibt, die nicht auch schon $\mathcal{T}_{\tilde{B},|M|}$ dominiert. Vermutlich ist $\mathcal{T}_{\tilde{B},|M|}$ die kleinste $\mathcal{T}_{B,M}$ dominierend Halbgruppe überhaupt, also die Betragshalbgruppe.

Beispiel 3.17 Sei $X = \mathbb{R}^n$,

$$B := \begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\ b_{n2}\cdots b_{nn} \end{pmatrix} , \qquad M := \begin{pmatrix} m_{11}\ m_{12}\cdots m_{1n} \\ m_{21}\ m_{22}\cdots m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\ m_{n2}\cdots m_{nn} \end{pmatrix} ,$$

$$b_{ij} \in \mathbb{R} \ , \ m_{ij} \in \mathfrak{M}[-r_o, 0] = (C[-r_o, 0])' .$$

Nach [Der] ist $\tilde{B}$ gegeben durch

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11}\,|b_{12}|\cdots|b_{1n}| \\ |b_{21}|\,b_{22}\cdots|b_{2n}| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |b_{n1}|\,|b_{n2}|\cdots b_{nn} \end{pmatrix} , \quad |M| = ((|m_{ij}|))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} .$$

OBdA besitze M keine Masse in 0 (Sonst zerlege man M wie in Beispiel 3.8) .
Mit $\mathcal{T}_{\tilde{B}, |M|}$ hat man daher eine kleinste dominierende Halbgruppe (in der Klasse $\mathcal{H}$) gefunden .

4. Stabilität unabhängig von der Zeitverzögerung

Bevor wir uns der schon in Kapitel I angeschnittenen Frage zuwenden, wann die Stabilität der Lösungen eines retardierten Cauchyproblems unabhängig von der Zeitverzögerung ist, leiten wir eine Abschätzung für die Spektralschranke $s(A_{B,M})$ her, wobei wir die Spektraltheorie positiver Halbgruppen ausnutzen. Zunächst einige vorbereitende Resultate.

Lemma 4.1 Für $(\mu,\lambda) \in \varrho := \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid \mu \in \varrho(B+M_\lambda)\}$ setze

$$R(\mu,\lambda) := R(\mu, B+M_\lambda) \ .$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) ϱ ist offen.

(ii) $R: (\mu,\lambda) \longmapsto R(\mu,\lambda)$ ist eine holomorphe Abbildung von ϱ nach $\mathcal{L}(X)$.

(iii) Ist für eine Folge $(\mu_n,\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ϱ mit $(\mu_n,\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} (\mu,\lambda) \in \mathbb{C}^2$ die Folge der Normen $\|R(\mu_n,\lambda_n)\|$ beschränkt , so ist (μ,λ) aus ϱ .

Beweis (i) Sei $(\mu,\lambda)\in\varrho$, $h\in\mathbb{C}$.
Dann hat man die Abschätzung

$$\|R(\mu,\lambda)\|\,\|M_{\lambda+h}-M_\lambda\| \le \|R(\mu,\lambda)\|\,\|M\|\,\|\varepsilon_{\lambda+h}-\varepsilon_\lambda\|_\infty \le$$

$$\le \|R(\mu,\lambda)\|\,\|M\|\,|h|\cdot C < \tfrac{1}{2} ,$$

falls $|h| < (2\|R(\mu,\lambda)\|\|M\|C)^{-1}$.
(Dabei kann die Konstante C gleichmäßig für alle λ in einer rechten Halbebene gewählt werden. Ist nämlich $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0$, so hat man

$$\|\varepsilon_{\lambda+h}-\varepsilon_\lambda\|_\infty \le e^{-\lambda_0 r_0}\|\varepsilon_h-\mathbb{1}\|_\infty \le e^{-\lambda_0 r_0}\,|h|\cdot\widetilde{C} \quad . \ )$$

Daher existiert

$$(4.1)\quad R(\mu,\lambda+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \big[R(\mu,\lambda)(M_{\lambda+h}-M_\lambda)\big]^n R(\mu,\lambda)$$

und es gilt $\|R(\mu,\lambda+h)\| \le 2\|R(\mu,\lambda)\|$.
Damit existiert für alle $d\in\mathbb{C}$ mit $|d| < (2\|R(\mu,\lambda)\|)^{-1}$

$$(4.2)\quad R(\mu+d,\lambda+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \big[R(\mu,\lambda+h)\big]^{k+1}(-d)^k \quad ,$$

folglich ist $(\mu+d,\lambda+h)\in\varrho$.
(ii) Die Abbildung $\lambda \longrightarrow M_\lambda$ ist analytisch. Denn

$$M_\lambda u = M\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n p_n\otimes u\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n M(p_n\otimes u) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n C_n\Big)u \quad .$$

Dabei sind die Funktionen $p_n\in C[-r_0,0]$ definiert durch $p_n(s) = (n!)^{-1}s^n$, $s\in[-r_0,0]$, und die Operatoren $C_n\in\mathcal{L}(X)$ sind erklärt durch $C_n u := M(p_n\otimes u)$, $u\in X$.

Setzt man diese Potenzreihenentwicklung für M in (4.1) und anschließend in (4.2) ein, so erhält man eine Potenzreihenentwicklung für $R(.,.)$ in jedem Punkt $(\mu,\lambda) \in \varrho$.

(iii) Gilt $\|R(\mu_n,\lambda_n)\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert $R(\mu_n+d,\lambda_n+h)$ nach (4.2) für alle komplexen Zahlen d und h mit $|d|<(2K)^{-1}$ und $|h|<(2C\|M\|K)^{-1}$, insbesondere also auch für (μ,λ) , falls n genügend groß gewählt wird.

□

Lemma 4.2 Sei B der Generator einer stark stetigen positiven Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf einem Banachverband E und es sei $\sigma(B) \neq \emptyset$.
Dann gilt für die Spektralschranke $s(B)$ von B :

(i) $s(B) \in \sigma(B)$.

(ii) $s(B) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)x \, dt$ existiert für alle $x \in E$.$\}$

$= \inf\{\mu \in \mathbb{R} \cap \varrho(B) \mid R(\mu, B) \geq 0\}$.

Für den Beweis verweisen wir auf [Gre2] oder [Nag1] und halten hier fest, daß die Aussage (i) der Schlüssel zu den folgenden Resultaten ist.

Wir untersuchen zunächst , wie sich die Spektralschranke der Operatoren $B+M_\lambda$ verändert , wenn λ variiert.

Satz 4.3 Sei B der Generator einer positiven Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf dem Banachverband X, M sei ein positiver Operator aus $\mathcal{L}(E,X)$.
Dann gilt für die Spektralschranke $s(\lambda) := s(B+M_\lambda)$:

(i) Die Funktion $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \lambda \longmapsto s(\lambda)$ ist monoton fallend und linksseitig stetig.

(ii) Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die Stetigkeit von s im Punkt λ_0:

a) $s(B+M_{\lambda_0})$ ist isoliert in $\sigma(B+M_{\lambda_0}) \cap \mathbb{R}$.

b) Es gibt Konstanten $\varepsilon > 0$, $K > 0$, so daß für alle $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon)$, $\mu > s(\lambda)$ gilt:

$$\|R(\mu, B+M_\lambda)\| \leq \frac{K}{\mu - s(\lambda)} .$$

c) Der Operator M_{λ_0} ist kompakt.

d) Die Resolvente $R(\lambda,B)$ ist kompakt.

Beweis (i) Die von $B+M_\lambda$ auf X erzeugten Halbgruppen $\mathcal{T}_\lambda$ sind positiv, und die Funktion $\lambda \longrightarrow T_\lambda(t)$ ist für alle t monoton fallend (diese Eigenschaften folgen aus der Phillips-Dyson Entwicklung).
Existiert nun für $\mu \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} T_{\lambda_0}(t) f \, dt \quad \text{für} \quad f \in E_+ \text{, so existiert auch}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda(t) f \, dt \qquad \text{für alle} \quad \lambda > \lambda_0 \quad .$$

Dies bedeutet wegen Lemma 4.2 die Monotonie von s. Angenommen, s sei in λ_0 nicht linksstetig, so ist

$$s(\lambda_0) < s_0 := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s(\lambda_0 - \varepsilon) \quad .$$

Offenbar ist $s_0 \in \varrho(B+M_{\lambda_0})$, daher ist $(s_0, \lambda_0) \in \varrho$. Dies ist ein Widerspruch zur Offenheit von ϱ, da für alle $\varepsilon > 0$ $(s(\lambda_0-\varepsilon), \lambda_0-\varepsilon)$ nicht in ϱ enthalten ist.

(ii) Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen, s ist nicht rechtsseitig stetig in λ_0, d.h. $s(\lambda_0) > s_0 := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s(\lambda_0+\varepsilon)$.

a) Es existiert ein $\mu \in \mathbb{R} \cap \varrho(B+M_{\lambda_0})$ mit

$$s(\lambda_0) > \mu > s_0 \quad ,$$

daher ist $(\mu, \lambda_0) \in \varrho$ und wegen Lemma 4.1 ist

$$R(\mu, \lambda_0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} R(\mu, \lambda_0+\varepsilon) \geq 0 \quad .$$

Dies ist wegen Lemma 4.2 ein Widerspruch zu $\mu < s(\lambda_0)$.

b) Unter der Wachstumsbedingung b) gilt für alle $0 < h < \varepsilon$:

$$\| R(s(\lambda_0), \lambda_0+h) \| \leq \frac{M}{s(\lambda_0)-s_0}$$

und daher ist nach Lemma 4.1 $(s(\lambda_0), \lambda_0) \in \varrho$.

Dies führt zum Widerspruch, da $s(\lambda_0) \in \sigma(B+M_{\lambda_0})$ nach Lemma 4.2,(i) .

c) Ist M_{λ_0} kompakt ,so besteht

$\sigma(B+M_{\lambda_0}) \cap \{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda > s(B)\}$ nur aus isolierten Punkten (vgl. [Gre2],(2.7), daher ist a) erfüllt.

d) Ist $R(\lambda,B)$ kompakt,so haben auch die Operatoren $B+M_\lambda$ kompakte Resolvente . Das Spektrum besteht daher nur aus isolierten Punkten. □

Damit erhält man folgende Abschätzung an die Spektralschranke des Operators $A_{B,M}$:

Korollar4.4: Sei B der Generator einer positiven Halbgruppe auf X und sei $M \geq 0$. Dann gelten folgende Aussagen für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) Ist $s(B+M_\lambda) < \lambda$,dann $s(A_{B,M}) < \lambda$.

(ii) Ist $s(B+M_\lambda) = \lambda$,dann $s(A_{B,M}) = \lambda$.

(iii) Sei $\sigma(B) \neq \emptyset$.

Ist dann $R(\lambda,B)$ kompakt oder M kompakt, so ist $s(A_{B,M})$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\lambda = s(\lambda) := s(B+M_\lambda)$ und es gilt:

Ist $s(B+M_\lambda) \lesseqgtr \lambda$,dann $s(A_{B,M}) \lesseqgtr \lambda$.

Beweis (i)Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda > s(B+M_\lambda)$,so ist für alle $\mu \geq \lambda$ wegen

$$\mu \geq \lambda > s(B+M_\lambda) \geq s(B+M_\mu)$$

$\mu \in \varrho(B+M_\mu)$,also auch $\mu \in \varrho(A_{B,M})$ (Satz II,2.4(i)) . Da $s(A_{B,M}) \in \sigma(A_{B,M})$ gilt somit $\lambda > s(A_{B,M})$.

(ii) Für $\lambda = s(B+M_\lambda)$ ist $\lambda \in \sigma(A_{B,M})$ .Wie in (i) schließt man ,daß $\mu \in \varrho(A_{B,M})$ für alle $\mu > \lambda$ ist. Daher ist $s(A_{B,M}) = \lambda$.

(iii) Nach Satz 4.3 ist $\lambda \mapsto s(\lambda)$ eine stetige, monoton fallende Funktion. Die Gleichung

$$\lambda = s(\lambda)$$

hat daher genau eine Lösung λ_o und λ_o ist offenbar der größte Spektralwert von $A_{B,M}$. □

Wir wenden uns nun dem schon in Kapitel I angeschnittenen Problem zu ,wann die Lösungen des retardierten Cauchyproblems für alle Zeitverzögerungen stabil sind. Wir denken uns dazu den Operator M zerlegt in

$$M = L \circ R_r \quad .$$

Dabei ist L ein stetiger linearer Operator von $C([-1,0],X)$ nach X und der Operator R_r ist für eine "Verzögerung" r definiert durch

$$R_r : C([-r_o,0],X) \longrightarrow C([-1,0],X)$$
$$R_r f(s) := f(-r(s)) \quad , \; f \in C([-r_o,0],X) \; , \; s \in [-1,0].$$

Die Verzögerung r ist dabei eine stetige Funktion von $[-1,0]$ in $\mathbb{R}_+$ mit $\max_{s\in[-1,0]} r(s) = \|r\| =: r_o$.

Ist $L_o \in \mathcal{L}(X)$ erklärt durch $L_o u := L(1 \otimes u)$, $u \in X$, so bestimmt der Operator $B+L_o$ die Spektralschranke von $A_{B,M}$ in folgender Weise :

Satz 4.5 Sei B der Generator einer positiven Halbgruppe $\mathcal{G}$ auf X, sei $L : C([-1,0],X) \longrightarrow X$ ein stetiger positiver linearer Operator und R_r wie oben. Ist $s(B+L_o) < 0$, so ist auch $s(A_{B,M}) < 0$ für $M = L \circ R_r$ mit jeder stetigen Verzögerung $r: [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Beweis Für $u \in X$ ist

$$M_o u = L \circ R_r(1_{[-r_o,0]} \otimes u) = L(1_{[-1,0]} \otimes u) = L_o u ,$$

also $M_o = L_o$ unabhängig von r.
Nun folgt aber aus $s(B+M_o) < 0$ mit Korollar 4.4 $s(A_{B,M}) < 0$. □

Bemerkung 4.6 Unter geeigneten Voraussetzungen, die in den Resultaten 2.1, 2.3, 2.5, 2.10 und 2.11 formuliert wurden, ist $s(A_{B,M}) < 0$ zur gleichmäßig exponentiellen Stabilität der Halbgruppe äquivalent.
Der Operator $M_o = L_o = L \circ R_r$ (falls $r(s) \neq 0$ für $s \in [-1,0]$) läßt sich interpretieren als gewöhnliche Störung ohne Zeitverzögerung.
Der Satz 4.4 bedeutet also:

Ist das System ohne Verzögerung $\dot{u}(t) = Bu(t) + L_o u(t)$ stabil, so ist auch das System mit Zeitverzögerung $\dot{u}(t) = Bu(t) + L \circ R_r u_t$ stabil für alle Verzögerungen r.

Das Ergebnis läßt sich auch auf Halbgruppen anwenden, die nicht positiv sind. Man muß nur berücksichtigen, daß Stabilität einer dominanten Halbgruppe die Stabilität der dominierten Halbgruppe nach sich zieht.

Korollar 4.7 Es sei B Generator einer Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf X, $L: C([-1,0],X) \longrightarrow X$ stetig und linear. Existieren eine $\mathcal{T}$ dominierende Halbgruppe $\tilde{\mathcal{T}}$ und ein L dominierender Operator $\tilde{L}$, mit $s(\tilde{B}+\tilde{L}_0) < 0$, so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ mit $M = L \circ R_r$ gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r, falls eine der folgenden Situationen gegeben ist:

(i) Der Raum X ist vom Typ $C(K)$, K kompakt.

(ii) Die Halbgruppe $\tilde{\mathcal{T}}$ ist normstetig für $t > 0$.

(iii) Die Halbgruppe $\tilde{\mathcal{T}}$ ist gleichmäßig exponentiell stabil, der Operator $K := L(\lambda - A_{\tilde{B}})$ ist stetig für ein $\lambda \in \varrho(A_{\tilde{B}})$ und einer der beiden Operatoren K, $R(\lambda, \tilde{B})$ ist kompakt.

Beweis Nach Satz 4.5 ist $s(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) < 0$, wobei $\tilde{M} := \tilde{L} \circ R_r$.

(i) Ist $X = C(K)$, K kompakt, so ist E isomorph zu $C(\tilde{K})$, wobei $\tilde{K} := [-r_0, 0] \times K$ gesetzt wird. Daher ist wegen Satz 1.3 $w_0(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) = s(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) < 0$.

(ii) Wegen Satz 1.1 ist $w_0(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) = s(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) < 0$.

(iii) $\mathcal{T}_{\tilde{B},\tilde{M}}$ ist quasikompakt nach Korollar 2.10, insbesondere ist also $w_0(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) = s(A_{\tilde{B},\tilde{M}}) < 0$.

Somit ist die dominierende Halbgruppe $\mathcal{T}_{\tilde{B},\tilde{M}}$ gleichmäßig exponentiell stabil. Für alle $f \in E$ gilt aber

$$|T_{B,M}(t)f| \leq T_{\tilde{B},\tilde{M}}(t)|f| \quad \text{und somit}$$

$$\|T_{B,M}(t)\| \leq \|T_{\tilde{B},\tilde{M}}(t)\| \quad \text{für alle } t \text{ .}$$

□

Setzt man $\mathcal{S}$ und L in Satz 4.5 nicht als positiv voraus, so kann man im allgemeinen aus der Stabilität der Lösungen des Systems ohne Zeitverzögerung, also aus $s(B+L_0) < 0$, nur auf Stabilität der Lösungen für "kleine" Zeitverzögerungen schließen.

Satz 4.8 Sei B Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf X , $L : C([-1,0],X) \longrightarrow X$ sei linear und stetig. Erzeugt $B+L_0$ eine gleichmäßig exponentiell stabile holomorphe Kontraktionshalbgruppe , so ist für $M := L \circ R_r$ die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ gleichmäßig exponentiell stabil für alle r mit $\|L\|\|r\| < 1$.

Beweis: Nach Satz III,2.1 ist $\mathcal{T}_{B,M}$ normstetig für $t > r_o := \|r\|$, also genügt zu zeigen

$$\sigma(A_{B,M}) \subset \{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda < 0\} \quad .$$

Nach Satz II,2.4 gilt

$$\lambda \in \sigma(A_{B,M}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(B+M_\lambda) \quad .$$

Sei $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Dann ist

$$\|L_o - M_\lambda\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|L(1 \otimes u) - L(\bar{e}^{\lambda r(\cdot)} \otimes u)\|$$

$$\leq \|L\| \|1 - \bar{e}^{\lambda r(\cdot)}\|_\infty \leq |\lambda| \|L\| \|r\| \quad ,$$

da $|e^{-\lambda r(s)} - 1| \leq |\lambda| r(s)$ für alle $s \in [-1,0]$.

Somit ist $\|R(\lambda,B+L_o)\| \|M_\lambda - L_o\| \leq \frac{1}{|\lambda|} |\lambda| \|L\| \|r\| < 1$,

und man erhält

$$R(\lambda,B+M_\lambda) = R(\lambda,B+L_o+M_\lambda-L_o) = \sum_{n=0}^{\infty} [R(\lambda,B+L_o)(M_\lambda-L_o)]^n R(\lambda,B+L_o),$$

also $\lambda \in \varrho(B+M_\lambda)$ und damit $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$. □

Bemerkung 4.9 Beispiel I,(1.2) zeigt, daß die Destabilisierung für große Zeitverzögerungen tatsächlich stattfindet.

Im Falle eines regulären, beschränkten Operators B auf einem ordnungsvollständigen Banachraum X kann man die Forderung in Korollar 4.7 an die Stabilität einer dominierenden Halbgruppe abschwächen.
In diesem Fall ist die Menge $\mathcal{L}^r(X)$ der regulären Operatoren auf X ein Banachverband, das Zentrum

$$Z(X) := \{ T \in \mathcal{L}^r(X) : |T| \leq n \cdot Id \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \}$$

ist ein Verbandsideal in $\mathcal{L}^r(X)$ und $\mathcal{L}^r(X)$ ist die ordnungstheoretische Summe von $Z(X)$ und $Z(X)^\perp$ (dem zu $Z(X)$ orthogonalen Band, vgl. [Sch], Kap. IV).
Somit hat B eine eindeutige Zerlegung

$$B = B_1 + B_2 \quad , \quad B_1 \in Z(X) \, , \, B_2 \in Z(X)^\perp \, .$$

Satz 4.10 Sei X ein ordnungsvollständiger Banachverband, sei $\mathcal{T}$ eine normstetige Halbgruppe mit regulärem Generator $B = B_1 + B_2$ $(B_1 \in Z(X), B_2 \in Z(X)^\perp)$. Weiter sei $L: C([-1,0],X) \longrightarrow X$ ein regulärer Operator. Gilt dann

(i) $s(B + L_0) < 0$ und
(ii) $s(B_1 + |B_2| + |L_0|) \leq 0$,

so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ (mit $M = L \circ R_r$) gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r.

Beweis OBdA: $s(B_1 + |B_2| + |L|_o) = 0$.(sonst folgt die Behauptung aus 4.7) .

Wegen der Normstetigkeit der Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ für $t > r_o$ (nach Satz 2.1) genügt es zu zeigen:

$$iy \in \varrho(A_{B,M}) \quad (\Leftrightarrow iy \in \varrho(B+M_{iy})) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R} .$$

Nun gilt für den Spektralradius

$$r(B_1 + \|B_1\| Id + |B_2| + |L|_o) = \|B_1\| ,$$

da der Operator positiv ist, und daher ist auch

$$r(B_1 + \|B_1\| Id + B_2 + M_{iy}) \leq \|B_1\| .$$

Somit ist das Spektrum von $B + M_{iy}$ enthalten in der Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |-\|B_1\| - \lambda| \leq \|B_1\|\}$.

Für $y \neq 0$ ist daher $iy \in \varrho(B+M_{iy})$,für $y=0$ ist $0 \in \varrho(B+M_o)$ wegen (i) .

□

Für unbeschränkte Operatoren B erhält man dieses Resultat,falls der Operator L eine einfache Struktur hat.

Diese Situation ist etwa in den Arbeiten [Len1], [Len2] vorhanden .

Satz 4.11 Sei B Generator einer positiven, für $t > 0$ kompakten Halbgruppe $\mathcal{T}$ auf einem Banachverband X. Für $f \in C([-1,0],X)$ sei der Operator L erklärt durch

$$Lf := \int_{-1}^{0} f(s)\,d\mu(s)$$

für ein Maß $\mu \in \mathcal{M}([-1,0])$.

Gilt dann

(i) $s(B+L_0) < 0$ und

(ii) $s(B+|L|_0) \leq 0$,

so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ (mit $M = L \circ R_r$) gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r.

Beweis: Wie im Beweis von 4.10 sei OBdA $s(B+|L|_0) = 0$. Wegen $|L|_0 = \int_{-1}^{0} \|\cdot\|\,d|\mu|(s) = \|\mu\|\,\mathrm{Id}_X$ ist $s(B) = -\|\mu\|$.

Aufgrund der Kompaktheit und Positivität von $\mathcal{T}$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $\sigma(B) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda < -\|\mu\| - \varepsilon\} = -\|\mu\|$.

Weiter gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$\sigma(B+M_{iy}) = \sigma(B) + \int_{-1}^{0} e^{-iyr(s)}\,d\mu(s) .$$

Da $\left| \int_{-1}^{0} e^{-iyr(s)}\,d\mu(s) \right| \leq \|\mu\|$ ist, somit

für $y \neq 0$ stets $iy \in \rho(B+M_{iy})$. Für $y = 0$ gilt $0 \in \rho(B+M_0)$ wegen (i).

Daher ist $i\mathbb{R} \in \rho(A_{B,M})$ und wegen der Normstetigkeit für $t > r_0$ (vgl. Satz 2.1) gilt $s(A_{B,M}) = \omega(A_{B,M}) < 0$. □

Wir wollen Satz 4.10 an einem Beispiel illustrieren:

Beispiel 4.12 Sei $X = \mathbb{R}^n$, $B = ((b_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$,
$L = ((l_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$ mit $b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $l_{i,j} \in \mathcal{M}[-1,0]$.

Liegen die Eigenwerte der Matrix $B_1 + |B_2| + |L|_o = ((c_{i,j}))$ mit

$$c_{i,j} := \begin{cases} |b_{i,j}| + \|l_{i,j}\| & \text{für } i = j \text{ ,} \\ b_{i,j} + \|l_{i,j}\| & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

in der linken Halbebene ,so sind die Lösungen des zugehörigen Systems von Funktionaldifferentialgleichungen $\dot{x}(t) = Bx(t) + L \circ R_r x_t$ gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r .
Ist die Spektralschranke 0 ,so muß man zusätzlich das Spektrum von $B + L_o = ((d_{i,j}))$ untersuchen, wobei

$$d_{i,j} := b_{i,j} + \langle 1\!\!1, l_{i,j} \rangle \quad .$$

Haben alle Eigenwerte dieser Matrix negativen Realteil, so ist auch in diesem Fall die Stabilitätsaussage gültig.

Hier wird deutlich,wie einfach diese hinreichenden Bedingungen nachprüfbar sind: Es genügt,das Spektrum eines einzigen bzw. von zwei Operatoren zu untersuchen .Die Diskussion der Spektren einer unendlichen Familie von Operatoren wie etwa in [Coo] entfällt.

Die Bedingungen im Satz 4.10 sind jedoch nicht immer notwendig,wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.13 Sei $X = \mathbb{R}^2$, $L = 0$ und

$$B = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} .$$

Die von B erzeugte Halbgruppe ist stabil,da $\sigma(B) = \{-0.5 + i\ ,\ -0.5 - i\}$, also ist auch $\mathcal{T}_B$ und $\mathcal{T}_{B,M} = \mathcal{T}_{B,0} = \mathcal{T}_B$ stabil für alle Verzögerungen.

Aber $B_1 + |B_2| + |L|_o = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$ hat das Spektrum $\{-1.5\ ,\ 0.5\}$.

Wir geben zum Schluß dieses Abschnitts notwendige Bedingungen für die Stabilität unabhängig von der Verzögerung an ,wie sie auch in [Coo] verwendet wurden.

Satz 4.14 Sei B Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf X, sei $L: C([-1,0],X) \longrightarrow X$ linear und stetig. Für die Verzögerung r sei $M := L \circ R_r$. Ist dann $s(A_{B,M}) < 0$ für alle Verzögerungen r, so gilt:

(i) $\{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda \geq 0\} \subset \varrho(B+L_0)$.

(ii) $iy \in \varrho(B+L\gamma)$ für alle $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ und alle stetigen Funktionen $\gamma: [-1,0] \to \Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Dabei ist der Operator $L_\gamma: X \longrightarrow X$ erklärt durch $L_\gamma u := L(\gamma \otimes u)$, $u \in X$.

Beweis:

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.

Nach Voraussetzung ist $\lambda \in \varrho(A_{B,M})$, also auch $\lambda \in \varrho(B+M_\lambda) = \varrho(B+(L \circ R_r)_\lambda)$.

Setzt man $r \equiv 0$, so ist $(L \circ R_r)_\lambda = L_0$ für alle λ.

(ii) Sei $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Nun ist $iy \in \varrho(A_{B,M})$, also $iy \in \varrho(B+M_{iy}) = \varrho(B+(L \circ R_r)_{iy})$.

Aber

$$(L \circ R_r)_{iy} u = L(e^{-iyr(\cdot)} \otimes u) = L(\gamma \otimes u) = L_\gamma u$$

für $\gamma(s) := e^{iyr(s)}$, $s \in [-1,0]$.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß sich jede stetige Funktion γ in den Einheitskreis mit geeignetem r in dieser Form darstellen läßt.

□

Bemerkungen 4.15

(i) In [Voo] wird gezeigt ,daß diese Bedingungen im Fall $X=\mathbb{R}^n$ auch hinreichend sind.

(ii) Im Falle einer für $t > 0$ normstetigen positiven Halbgruppe $\mathcal{S}$ und eines positiven Operators L ist $S(B+L_o) < 0$ hinreichend und notwendig für die Stabilität unabhängig von der Zeitverzögerung, wie Satz 4.4 und 4.9 zeigen.Also ist in diesem Fall die Bedingung (ii) überflüssig.

(iii) Im nicht positiven Fall sieht man keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Bedingung (ii) und der Forderung an die Stabilität einer dominierenden Halbgruppe in 4.7 oder 4.10 .

In vielen in der Literatur behandelten Beispielen erweist sich diese einfache hinreichende Bedingung jedoch auch als notwendig,wie wir in Kapitel IV zeigen werden.

IV Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir einige Anwendungen auf konkrete Beispiele vorstellen. Für dabei verwendete Begriffe und Resultate aus der Theorie nichtlinearer Funktionaldifferentialgleichungen verweisen wir auf [Hal] , für abstrakte nichtlineare Gleichungen in unendlichdimensionalen Räumen auf die Arbeiten [Tra] und [Des] .

1. Modelle aus der theoretischen Biologie

Wir beginnen mit einem nichtlinearen Analogon zu dem in I,(1.1) vorgestellten einfachen linearen Modell. Gleichungen diese Typs wurden 1968,1974 von Maynard Smith als mathematisches Modell für an Fliegenpopulationen durchgeführte Experimente (Nicholson 1954, Mourao und Tadei 1974) vorgeschlagen. Ein allgemeineres Modell wurde 1978 von Perez,Malta und Coutinho eingeführt.

Beispiel 1 : Skalare Populationsgleichung

Wir betrachten die Funktionaldifferentialgleichung

$$(1.1)\quad \dot{x}(t) = -d(x(t))x(t) + \int_{-1}^{0} b(s,x(t-r(s)))x(t-r(s))d\sigma(s).$$

Dabei sind die Sterberate d und die Geburtsrate b stetig

differenzierbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 < d(0) < b(s,0)$ für alle $s \in [-1,0]$.

(ii) d ist monoton wachsend und für alle $s \in [-1,0]$ ist $b(s,.)$ monoton fallend mit $\lim_{x\to\infty} b(s,x) = 0$.

(iii) Die Verzögerung $r \in [-1,0] \to \mathbb{R}^+$ ist eine stetige Funktion, das Maß σ ist positiv mit Norm 1 .

Die Gleichung (1.1) besitzt eine positive Gleichgewichtslösung $\bar{x}$ mit

$$d(\bar{x}) = b_o(\bar{x}) := \int_{-1}^{0} b(s,\bar{x})d\sigma(s) \quad .$$

Linearisiert man an dieser stationären Lösung, so erhält man die Gleichung

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Mx_t = Bx(t) + L\circ R_r x_t \tag{1.2}$$

mit $B := -(d'(\bar{x})\bar{x} + d(\bar{x}))$ und

$$Lf := \int_{-1}^{0} (b_x(s,\bar{x})\bar{x} + b(s,\bar{x}))f(s)d\sigma(s) \quad .$$

Dabei bezeichnet $b_x(.,.)$ die partielle Ableitung nach x . Eine Anwendung von Satz III,4.11 liefert

<u>Satz 1.1</u> Die positive Gleichgewichtslösung $\bar{x}$ der Gleichung (1.1) ist asymptotisch stabil für alle Verzögerungen r , falls gilt:

(i) $$\int_{-1}^{0} (b_x(s,\bar{x})\bar{x} + b(s,\bar{x}))d\sigma(s) < d'(\bar{x})\bar{x} + d(\bar{x})$$

(ii) $$\int_{-1}^{0} |b_x(s,\bar{x})\bar{x} + b(s,\bar{x})| d\sigma(s) \leq d'(\bar{x})\bar{x} + d(\bar{x}) \quad .$$

Beweis: Der Ausdruck (i) ist äquivalent zu $B+L_0 < 0$,der Ausdruck (ii) zu $B+|L|_0 \leq 0$.
Daher folgt aus Satz III,4.11 die gleichmäßig asymptotische Stabilität der zu (1.2) gehörigen Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ für alle Verzögerungen r .Dies impliziert die asymptotische Stabilität der Gleichgewichtslösung von (1.1) (vgl. [Hal]) . □

Ist die Nichtlinearität nicht von s abhängig,erhält man die Gleichung

(1.3) $$\dot{x}(t) = -d(x(t))x(t) + \int_{-1}^{0} b(x(t-r(s))x(t-r(s))d\sigma(s).$$

In diesem Fall sind die Bedingungen in Satz 1.1 auch notwendig für die asymptotische Stabilität der linearen Gleichung (1.2) .

Denn in diesem Fall ist

$$Lf = \int_{-1}^{0} (b'(\bar{x})\bar{x} + b(\bar{x}))f(s)d\sigma(s)$$

und es gilt offenbar $L \geq 0$ oder $-L \geq 0$.
Die Notwendigkeit folgt daher aus folgendem Resultat:

Satz 1.2 Sei $X = \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $L \in (C[-1,0])'$ mit $L \geq 0$ oder $-L \geq 0$.
Die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ (mit $M = L \circ R_r$) ist genau dann gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r, falls gilt:

(i) $B + L_0 < 0$
(ii) $B + |L|_0 \leq 0$.

Beweis:

a) Im Falle $L \geq 0$ folgt die Aussage aus III,4.4 .

b) Für den Fall $-L \geq 0$ sind die Bedingungen hinreichend wegen III,4.11 , außerdem ist (i) notwendig nach III,4.14 .
Sei nun (ii) nicht erfüllt ,also $B + |L|_0 = B - L_0 \geq 0$.
Für $a \in [0,1]$ sei nun

$$s(a) := B + L(e^{i\pi a}\mathbb{1}) = B + e^{i\pi a}L_0 = \begin{cases} B+L_0 < 0 & \text{für } a=0 \\ B+|L|_0 \geq 0 & \text{für } a=1 \end{cases} .$$

Da s stetig ist , gibt es ein $a_0 \in [0,1]$ mit $\operatorname{Re} s(a_0) = 0$ und offenbar ist $y := \operatorname{Im} s(a_0) \neq 0$.
Für die konstante Funktion

$$\gamma(s) := e^{i\pi a_0} \quad , \quad s \in [-1,0]$$

gilt daher $iy = B + L\gamma$, was einen Widerspruch zu 4.14 (ii) herbeiführt . □

Bemerkung 1.3 Diese Ergebnisse sind nicht direkt mit den in [Wal1] abgeleiteten Bedingungen vergleichbar.Dort wird Stabilität unabhängig von Verzögerungen der speziellen Form $r(s) = r_0 s$ untersucht.

Als nächstes Beispiel untersuchen wir ein in der Literatur weit verbreitetes logistisches Populationsmodell.

Beispiel 2 : Logistisches Populationsmodell

Wir betrachten die Gleichung

$$(1.4) \quad \dot{x}(t) = ax(t)\left(1 - \frac{1}{K}\left(bx(t) + \int_{-1}^{0} x(t-r(s))d\eta(s)\right)\right) .$$

Dabei sind a , K und b positive Konstanten, $\eta \in (C[-1,0])'$ ein positives Maß und $r:[-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig. Außerdem gelte OBdA $B + \|\eta\| = 1$.

Die Gleichung (1.4) ist eine Variante der bekannten Verhulstgleichung. Verschiedene Versionen dieser Gleichung mit Verzögerungen wurden in der Literatur betrachtet ([Had2], [Alt], [Wal1]) und es zeigt sich, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Gleichgewichtslösung von (1.4) durch die Verzögerung destabilisiert wird und periodische Lösungen auftreten.

Wir wollen den Fall charakterisieren, daß die Gleichgewichtslösung $\bar{x} = K$ von (1.4) für alle Verzögerungen stabil bleibt.

Linearisierung von (1.4) an $\bar{x}$ führt zur Gleichung

$$(1.5) \quad \dot{x}(t) = -abx(t) - a\int_{-1}^{0} x(t-r(s))d\eta(s) .$$

Analog zu Beispiel 1 erhält man die Aussage:

Satz 1.3 Die positive Gleichgewichtslösung $\bar{x}$ von (1.4) ist asymptotisch stabil für alle Verzögerungen r ,falls $b \geq \|\eta\|$ gilt.

Beweis : Mit den Bezeichnungen von Satz 1.2 gilt offenbar $B + |L|_0 = -b + \|\eta\| \leq 0$ und außerdem $B + L_0 = -b - \|\eta\| = -1 < 0$. □

Dieser Satz verallgemeinert das in [Len2] für diskrete Verzögerungen gewonnene Resultat auf allgemeine Maße und stellt eine Ergänzung der Stabilitätsuntersuchung in [Had3] und [Wal3] dar .

Im nächsten Beispiel zeigen wir,daß diese Methoden auch für Systeme von Funktionaldifferentialgleichungen,also für $X = \mathbb{R}^n$ gut angewendet werden können.

Beispiel 3 : Goodwin Oscillator

Für den von Jacob und Monod ([Jac],1961) angenommenen Mechanismus der Kontrolle von biochemischen Reaktionsketten in lebenden Zellen durch repressive Gene hat Goodwin ([Goo] ,1963) ein mathematisches Modell vorgeschlagen,welches in der Literatur ausführlich untersucht wurde (vgl.[Has], [Mor], [Oth]) . Es handelt sich dabei um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -b_1 x_1(t) + \frac{k_1}{1 + x_n^a} \quad , \\
\dot{x}_i(t) &= -b_i x_i(t) + k_i x_{i-1}(t) \quad , \; i=2,\ldots,n \; .
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Dabei sind alle Koeffizienten positiv,der 'Hillkoeffizient' a ist ganzzahlig (a gibt die Anzahl der Moleküle des Endproduktes an,die nötig sind,um das für die Produktion des Ausgangsproduktes verantwortliche Enzym zu blockieren.) .
Diskrete Verzögerungen in diesem Rückkopplungsmechanismus,die durch die Dauer der Transkription und Translation verursacht werden,wurden von Landahl ([Lan],1969) in das Modell eingeführt: MacDonald ([Mac],1977) untersucht verteilte Verzögerungen spezieller Form und zeigt, daß die Gleichgewichtslösung für $a \geq 2$ durch Verzögerungen destabilisiert werden kann .

Wir betrachten ein Modell mit beliebigen Verzögerungen in allen Gleichungen (Es ist möglich,durch geeignete Transformationen zu einem Modell zu gelangen,das nur in der ersten Gleichung eine Verzögerung enthält, vgl. [Hei]) :

$$\dot{x}_1(t) = -b_1 x(t) + \frac{k_1}{1 + \left(\int_{-1}^{0} x_n(t-r(s))\,d\eta_1(s) \right)^a}$$

(1.7)

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x(t) + k_i \int_{-1}^{0} x_{i-1}(t-r(s))\,d\eta_i(s) \quad , i=2,..,n.$$

Dabei sind $\eta_i \in C([-1,0])'$ positive Maße mit $\|\eta_i\| = 1$, $r:[-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine stetige Funktion.

Es gibt stets eine positive stationäre Lösung $\bar{x}=(\bar{x}_1,..,\bar{x}_n)$ mit

(1.8)
$$\frac{b_1 \cdots b_n}{k_1 \cdots k_n} \bar{x}_n = \frac{1}{1+\bar{x}_n^a}$$

$$\bar{x}_{i-1} = \frac{b_i}{k_i} \bar{x}_i \quad , \quad i= 2,\ldots,n \quad .$$

Eine Anwendung von Satz III,4.7 liefert folgende Aussage über die Stabilität der Gleichgewichtslösung:

Satz 1.4 Die positive Gleichgewichtslösung $\bar{x}$ des Systems (1.7) ist asymptotisch stabil für alle Verzögerungen r, falls gilt:

$$\frac{b_1 \cdots b_n}{k_1 \cdots k_n} =: c > \sqrt[a]{a-1} \cdot \frac{a-1}{a} \quad .$$

Insbesondere ist dies stets für $a=1$ der Fall.

Beweis: Linearisieren von (1.7) an der stationären Lösung $\bar{x}$ führt zu dem linearen System

(1.9) $\dot{x}(t) = Bx(t) + L \circ R_r x_t$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -b_n \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$(Lf)_i = \begin{cases} -k_1\beta \int_{-1}^{0} f_n(s)\,d\eta_1(s) & , i=1 \\ k_i \int_{-1}^{0} f_{i-1}(s)\,d\eta_i(s) & , i=2,\dots,n \end{cases}$$

für $f \in C([-1,0],R^n)$.

Dabei ist $\beta := \dfrac{a\bar{x}_n^{a-1}}{(1+\bar{x}_n^{a})^2}$.

Somit erzeugt B also eine positive Halbgruppe und $|L|_0$ ist gegeben durch

$$|L|_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & k_1\beta \\ k_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & k_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Das Spektrum von $B+|L|_0$ ist bestimmt durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

(1.10) $p(\lambda) := (\lambda+b_1)(\lambda+b_2)\dots(\lambda+b_n) - \beta k_1\dots k_n$.

Dieses Polynom hat keine Wurzeln mit positivem Realteil, falls

$$\frac{b_1\dots b_n}{k_1\dots k_n} =: c > \beta .$$

In diesem Fall ist nach Satz III,4.7 die Nullösung des linearen Systems (1.9) gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r .

Setze $y := \bar{x}_n$. Es genügt also zu zeigen :

$$(1.11) \qquad 1 < \frac{c}{\beta} = \frac{1+y^a}{ay^a} \qquad \text{wegen (1.8)} .$$

Für a=1 ist dies stets erfüllt,also ist in diesem Fall die Aussage bewiesen.

Sei nun $a \geq 2$. Dann ist (1.11) äquivalent zu

$$y < (a-1)^{-\frac{1}{a}} =: y_o \qquad .$$

y_o ist aber gerade die Gleichgewichtslösung für

$$c = c_o := (a-1)^{\frac{1}{a}} \frac{a-1}{a} \quad , \quad \text{da}$$

$$c_o y_o = \frac{a-1}{a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a-1}} = \frac{1}{1 + y_o^a} \qquad .$$

Nun ist y eine monoton fallende Funktion von c , also gilt für alle $c > c_o$ auch $y < y_o$ und (1.11) ist erfüllt .

□

2. Semilineare Reaktions- Diffusionsgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Probleme, bei denen der Grundraum X ein Funktionenraum und B der Laplaceoperator ist. Zu solchen Systemen gelangt man, wenn man in den oben diskutierten Populationsgleichungen die zugrundeliegende Annahme der räumlichen Homogenität der Population fallen läßt.

Beispiel 4 : Logistisches Wachstum einer räumlich verteilten Population.

Wir betrachten folgende Verallgemeinerung von Beispiel 2 auf räumlich verteilte Populationen:

$$(2.1)\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + au(x,t)\Big[1-(bu(x,t)+\int_{-1}^{0}u(x,t-r(s)$$

für $t>0$, $0<x<\pi$ mit Dirichletrandbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für alle t . Dabei sind D , a, b positive Konstanten , $\eta \in (C[-1,0])'$ ein positives Maß und es gilt $b + \|\eta\| = 1$.

Für $a>D$ existiert eine Gleichgewichtslösung $h\in C^2[0,\pi]$ als Lösung des nichtlinearen Randwertproblems

$$(2.2)\qquad 0 = Dv'' + av(x)(1-v(x)) \quad , \quad x\in(0,\pi) \quad ,$$
$$0 = v(0) = v(\pi)$$

und es gilt $h(x) > 0$ für $x\in(0,\pi)$
(vgl. [Ste] für den Beweis und weitere Details) .

Auf dem Grundraum $X := \{u \in C[0,\pi] \mid u(0)=u(\pi)=0\}$ sei der Operator $(B_o, D(B_o))$ erklärt durch

$$B_o u = u'' \quad \text{für} \quad u \in D(B_o) := \{u \in C^2(0,\pi) \cap X \mid u'' \in X\} .$$

Für eine stetige Funktion v bezeichne M_v den Multiplikator mit v. Der Operator B sei erklärt durch

$$B = DB_o + M_{a(1-h-bh)} ,$$

der Operator $L : C([-1,0],X) \longrightarrow X$ sei gegeben durch

$$Lf := -M_{ah} \int_{-1}^{0} f(s)\,d\eta(s) .$$

Dann läßt sich die Linearisierung von (2.1) an der stationären Lösung h schreiben als

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + L \circ R_r u_t \tag{2.3}$$

und man erhält ein ähnliches Resultat wie in Beispiel 2.

Satz 2.1 Gilt $b > \|\eta\|$, so ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B,M}$ (mit $M = L \circ R_r$) gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r, d.h. die Nullösung des linearisierten Systems (2.3) ist asymptotisch stabil.

Beweis: Der Generator B_o und damit auch B ist Generator einer für $t > 0$ kompakten Halbgruppe (vgl. [Paz1]) und es gilt:

$$B + |L|_0 = DB_0 + M_{a(1-h-bh)} + M_{ah}\cdot\|\eta\|$$
$$= DB_0 + M_{a(1-(1+b-\|\eta\|)h)} \quad .$$

Die Spektralschranke $s(B + |L|_0)$ ist ein Eigenwert von $B + |L|_0$, da dieser Operator Generator einer positiven, für $t > 0$ kompakten Halbgruppe ist.
Angenommen $s(B + |L|_0) =: \lambda \geq 0$.
Dann gibt es ein $v \in D(B_0)$ mit

$$Dv'' + a(1 - (1 + b - \|\eta\|)h) = \lambda v \quad \text{und damit}$$
$$Dv'' + (a(1-h) + (-\lambda - a(b-\|\eta\|))h)v = 0 .$$

Da $(-\lambda - a(b-\|\eta\|))h(x) < 0$ für alle $x \in (0,\pi)$,
gilt nach dem Sturmschen Vergleichssatz ([Wal2], 192ff):
Jede Lösung von

(2.4) $Dv'' + a(1-h)v = 0$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $(0,\pi)$.
Dies ist ein Widerspruch zur Positivität von h, da h Lösung von (2.2) und damit auch von (2.4) ist.
Somit ist $s(B + |L|_0) < 0$ und nach Satz III,4.7 ist $\mathcal{T}_{B,M}$ gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r.

□

Mit dem nächsten Beispiel wollen wir zeigen, wie man für eine bestimmte Klasse von Gleichungen Stabilitätsaussagen über die Gleichgewichtslösung des unverzögerten Systems direkt auf die Gleichgewichtslösung des Systems mit Verzögerung übertragen kann.

Beispiel 5 : Ein Epidemiemodell mit Diffusion und Verzögerung.

Wir betrachten zunächst folgende abstrakte Situation:
Sei B Generator einer positiven, für $t > 0$ normstetigen Halbgruppe auf einem Banachverband X .
Der Operator $G : X \longrightarrow X$ sei Frechet-differenzierbar mit $G'[u] \geq 0$ für alle $u \in X_+$. Das nichtlineare System

(2.5) $\quad \dot{u}(t) = Bu(t) + G[u(t)]$

besitze eine positive stationäre Lösung $\bar{u}$ (für Existenztheorie semilinearer Gleichungen vgl. [Paz1]), und das an $\bar{u}$ linearisierte System

(2.6) $\quad \dot{u}(t) = Bu(t) + G'[u]u(t)$

sei gleichmäßig exponentiell stabil.
Geht man zu einem verzögerten System

(2.7) $\quad \dot{u}(t) = Bu(t) + \int_{-1}^{0} G[u(t-r(s))]\, d\eta(s)$

über, wobei $\eta \in (C[-1,0])'$ ein positives Maß mit $\|\eta\| = 1$ ist, so ist $\bar{u}$ offenbar auch eine stationäre Lösung

von (2.7) . Die Linearisierung an $\bar{u}$ ist

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + \int_{-1}^{0} G[\bar{u}]u(t-r(s))d\eta(s) \tag{2.8}$$

und man erhält folgendes Resultat:

Satz 2.2 Ist in der oben beschriebenen Situation die Lösungshalbgruppe des unverzögerten Systems (2.6) gleichmäßig exponentiell stabil , so ist die Lösungshalbgruppe des verzögerten Problems (2.8) gleichmäßig exponentiell stabil für alle Verzögerungen r .

Beweis: Das Resultat folgt unmittelbar aus Satz III,4.5 , da (mit den dortigen Bezeichnungen) $L_o = G[\bar{u}] \geq 0$ gilt. □

Bemerkung 2.3

(i) Das Resultat 2.2 besagt, daß die "linear asymptotische" Stabilität der positiven Gleichgewichtslösung des Systems (2.5) bei beliebigen Störungen der Form (2.7) erhalten bleibt.

(ii) Die Resultate und Methoden in [Des] zeigen den Weg, wie man daraus auf die asymptotische Stabilität der Gleichgewichtslösungen schließen kann.

(iii) Das Resultat bleibt auch richtig,wenn man in (2.7) allgemeinere frechetdifferenzierbare Verzögerungsoperatoren zuläßt,also die Gleichung

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + \tilde{G}[R_r u_t] \qquad \text{betrachtet.}$$

Nötig ist, daß $\tilde{G}'[1 \otimes \bar{u}] : C([-1,0],X) \to X$ positiv ist und

die Beziehungen

$$\tilde{G}[1 \otimes \bar{u}] = G[\bar{u}] \qquad \text{und}$$
$$\tilde{G}'[1 \otimes \bar{u}]_0 = G'[u]$$

erfüllt sind .

Ein Beispiel für die oben beschriebene Situation liefert folgendes System semilinearer parabolischer Differentialgleichungen, das von [Cap] als Modell für die Ausbreitung von Infektionskrankheiten in räumlich verteilten Populationen vorgeschlagen wurde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t) &= d_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,t) - a_{11}u_1(x,t) + a_{12}u_2(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_2(x,t) &= d_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t) - a_{22}u_2(x,t) + g[u_1(x,t)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Hier sind alle Konstanten positiv, die Funktion g ist monoton wachsend und drückt die Infektionsrate aus. Geht man von einer Inkubationsphase der Infektionskrankheit aus, ist es realistischer, den Ausdruck $g[u_1(x,t)]$ in (2.9) etwa durch den Ausdruck

$$\int_{-1}^{0} g[u_1(x,t-r(s))]\,d\eta(s) \qquad \text{zu ersetzen,}$$

wobei $\eta \in (C(-1,0))'$ ein positives Maß ist.
Unter geeigneten Annahmen an die Randbedingungen und an das Gebiet Ω sind die Voraussetzungen der oben beschriebenen Situation erfüllt (vgl. [Paz1]) . Die in [Cap] bzw. [Nag3] formulierten Bedingungen für die Stabilität der posi-

tiven Gleichgewichtslösung lassen sich also im Sinne von Satz 2.2 direkt auf das verzögerte System übertragen.

3. Die lineare Boltzmanngleichung

In diesem Abschnitt behandeln wir die bereits in Kapitel I vorgestellte lineare Boltzmanngleichung mit Verzögerung. Aussagen über das Spektrum des Generators der Lösungshalbgruppe lassen sich relativ einfach aus den Ergebnissen in III,4 gewinnen. Die Schwierigkeit liegt im Schluß vom Spektrum des Generators auf die Asymptotik der Halbgruppe, da keine der in III,2 vorausgesetzten Regularitätseigenschaften vorhanden ist.

Beispiel 6 : Das Reaktorproblem

Wir schreiben die Boltzmanngleichung in der abstrakten Form im Banachraum $L^1(D \times V) =: X$ als

$$\dot{u}(t) = B_o u(t) + Ku_t \qquad , \tag{3.1}$$

wobei für $f \in E := C([-r_o, 0], X)$ der Operator K erklärt ist durch

$$Kf(x,v) = \int_{-r_o}^{0} \int_V k(x,v,v',s) f(t+s,x,v') dv' ds$$

Der Kern k sei positiv und der Einfachheit halber stetig differenzierbar.
Unter den üblichen Voraussetzungen (vgl. [Voi]) erzeugt B_o eine positive Halbgruppe.

Die Lösungen von (3.1) sind - wie in Kapitel II beschrieben - durch die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B_o,K}$ mit Generator $A_{B_o,K}$ gegeben und man erhält folgende Aussage:

Satz 3.1 Gilt für eine reelle Zahl λ

$s(B_o + K\lambda) < \lambda$, so ist

$s(A_{B_o,K}) < \lambda$.

Insbesondere ist $s(A_{B_o,K}) < 0$,falls $s(B_o+K_o) < 0$.

Der Beweis folgt sofort aus Satz III,4.4 .

Im allgemeinen kann man daraus noch nicht auf das asymptotische Verhalten von $T_{B_o,K}(t)$ schließen . Im speziellen Fall des eindimensionalen Reaktorproblems ist es jedoch möglich,die Quasikompaktheit der Halbgruppe zu zeigen.

Satz 3.2 (eindimensionales Reaktorproblem)
Sei $n=1$, $D=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $V=\{v\in\mathbb{R} \mid 0 \le v_{min} \le |v| \le v_{max} < \infty\}$.
Dann ist die Lösungshalbgruppe $\mathcal{T}_{B_o,K}$ von (3.1) quasikompakt .

Beweis Die von B_o erzeugte Halbgruppe ist gleichmäßig exponentiell stabil, und daher gilt dies auch für die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B_o}$ (vgl. I,1.) . Außerdem kann man die Resolvente $R(\lambda,B_o)$ explizit angeben (vgl. [Gre5] für den Beweis dieser Aussagen). Der Operator $K(\lambda - A_{B_o})$ ist stetig, da für differenzierbares $f \in E$ gilt:

$$(Kf')(x,v) = \int_{-r_o}^{o} \int_V k(x,v,v';s) f'(s,x,v') dv' ds$$

$$= \int_V k(x,v,v';0) f(0,x,v') dv' - \int_V k(x,v,v';-r_o) f(-r_o,x,v') dv'$$

$$- \int_{-r_o}^{o} \int_V k_s(x,v,v';s) f(s,x,v') dv' ds \quad .$$

Analog wie in [Gre5], Beispiel 2.7 zeigt man: Die Operatoren $R(\lambda,B_o)K$ sowie $R(\lambda,B_o)K(\lambda - A_{B_o})$ sind kompakte Kernoperatoren .
Betrachtet man nun die Störungsformel in II,2.6 , so erkennt man, daß für alle $t > 0$ die Operatoren $T_{B_o,K}(t) - T_{B_o}(t)$ kompakt sind., daher ist die Halbgruppe $\mathcal{T}_{B_o,K}$ quasikompakt . □

Das hat folgende Konsequenzen für das Spektrum von $A_{B_o,K}$: Ist $s(A_{B_o,K}) > \omega(B_o) = s(B_o)$, so besteht die Menge $\{\lambda \in \sigma(A_{B_o,K}) \mid \operatorname{Re}\lambda > s(B_o)\}$ nur aus Eigenwerten mit

endlichdimensionalem Residuum , insbesondere ist $s(A_{B_\delta,K})$ ein dominanter Eigenwert ,d.h. es gibt keine anderen Spektralwerte mit gleichem Realteil ([Nag1] ,B IV,Sect.2).

Literaturverzeichnis

Alt Alt,W.: Some Periodicity Criteria for Functional Differential Equations. Manuscripta Mathematica 23, 295-318 (1978) .

Bed Beddington,J.R. und May,R.M.: Time Delays are not Necessarily Destabilizing.Math.Biosc. 27,109-117 (1975).

Bel Bellman,R. und Cooke,K.L. : Differential-Difference Equations.Academic Press,New York 1963 .

Bell Bell,G.I. und Glasstone,S. : Nuclear Reactor Theory, p.463. Van Nostrand,New York.

Bri Brierley,S.D.: On Stability Independent of Delay for Linear Systems. IEEE Trans.on Aut. Control. Vol AC-27,No.1 (1982) .

Cap Capasso,V. und Maddalena,L.: Convergence to Equilibrium States for a Reaction-Diffusion System Modelling the Spatial Spread of a Class of Bacterial and Viral Diseases.J.Math.Biol. ,173-184 (1981

Cas Case,K.M. und Zweifel,P.F.: Linear Transport Theory. Addison-Wesley,Reading,Mass.,1967 .

Coo Cooke,K.L. und Ferreira,J.M.: Stability Conditions for Linear Retarded Functional Differential Equations. J.Math.Anal.and Applications, 96,480-504 (1983) .

Cus Cushing,J.M.: Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Lecture Notes in Biomathematics No.20.Springer, Berlin,1977.

DiB1 Di Blasio,G.,Kunisch,K. und Sinestrari,E.: L^2-Regularity for Parabolic Partial Integrodifferential Equations with Delay in the Highest Order Derivatives. Preprint No.7-1982,Universität Graz.

Di-2 Di Blasio,G.,Kunisch,K. und Sinestrari,E.: Stability for Abstract Linear Functional Differential equations. (1984),to appear in Israel J. Math.

Dat1 Datko,R.: The Uniform Exponential Stability of a Class of Linear Differential-Difference Equations in a Hilbert Space. Proc.Roy.Soc. Edinburgh, 89 A,201-215 (1981) .

Dat2 Datko,R.: The Laplace Transform and the Integral Stability of Certain Linear Processes.J.Diff.Equ. Vol.48,No.3 (1983) .

Dat3 Datko,R.: Uniform Asymptotic Stability of Evolutionary Processes in a Banach Space.SIAM J.Math.Anal. 3, 428-445 (1972) .

Dat4 Datko,R.: A Procedure for Determination of the Exponential Stability of Certain Differential-Difference Equations.Quarterly of Appl.Math.3, 279-292 (1978) .

Dat5 Datko,R.: Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space.J.Diff.Equ. 25,258-274 (1974) .

Dav Davies,E.B.: One Parameter Semigroups. Academic Press,London,1980 .

Der Derndinger,R.: Betragshalbgruppen normstetiger Operatorhalbgruppen.Arch.Math.Vol.42,371-375(1984).

Des Desch,W. und Schappacher,W.: Linearized Stability for Nonlinear Semigroups.Semesterberichte Funktionalanalysis,Tübingen,WS 84/85 .

Dic Dickerson,J.: Stability of Linear Functional Differential Equations on Banach Spaces. J.Math.Anal.and Applications,55,150-155 (1976) .

Fat Fattorini,H.O.: The Cauchy Problem. Addison-Wesley,Reading,Mass.,1983.

Goo Goodwin,B.C.: Temporal Organization in Cells. Academic Press,New York,1963 .

Gr1 Green,D. und Stech,H.W.: Diffusion and Hereditary Effects in a Class of Population Models. In: Differential Equations and Applications in Ecology . Academic Press,New York,1981 .

Gr2 Green,D. und Stech,H.W.: Asymptotic Behaviour of a Delay-Diffusion Model. General Motors Institute, Technical Report.

Gra Grabosch,A. und Moustakas,U.: A Semigroup Approach to Retarded Differential Equations in C[-1,0] . In: [Nag1] ,B IV .

Gre1 Greiner,G.: Perturbing the Boundary Condition of a Generator.Erscheint in Houston J.Math.

Gre2 Greiner,G.: Zur Perron Frobenius Theorie stark stetiger Halbgruppen. Math.Z. 177,401-423 (1981).

Gre3 Greiner,G.,Voigt,J. und Wolff,M.: On the Spectral Bound of the Generator of Semigroups of Positive Operators. J.Operator Theory 5 (1981) .

Gre4 Greiner,G.: Spectral Properties and Asymptotic Behaviour of the Linear Transport Equation. Math.Z.185,167-177(1984) .

Gre5 Greiner,G.: Spektrum und Asymptotic stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren.Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften,1982.

Had1 Hadeler,H.P.: Delay Equations in Biology . In: Reitgen,H.O. und Walther,H.O. (eds.): Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Springer Lecture Notes 730,Bonn 1978

Had2 Hadeler,H.P. und Tomiak J. : Periodic Solutions of Difference-Differential Equations. Arch.Rat.Mech.Anal.65,87-95 (1977) .

Hal3 Hadeler,K.P.:On the Stability of the Stationary State of a Population Growth Model with Time-Lag. J.Math.Biol.3,197-201 (1976) .

Hal Hale,J. : Theory of Functional Differential Equations. Springer,New York,1977.

Has Hastings,S.P.,Tyson,J.J. und Webster,D.: Existence of Periodic Solutions for Negative Feedback Cellular Control Systems.J.Diff.Equ.25,39-64 (1977).

Hay Hayes,N.D.: Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Differential-Difference Equation. J.London Math.Soc.,25 ,226-232,(1950).

Hei an der Heiden,U.:Delay-induced Biochemical Oscillations. In:Bioph.and Bioch.Information Transfer and Recogn. Varna Conf.Proc.,533-540,Plenum Press,New York 1978.

Her Hertz,D.,Jury,E.I. und Zeheb E. : Stability Independent and Dependent of Delay for Delay Differential Systems. Journal of the Franklin Institute,Vol.318,No.3, 142-150,(1984).

Inf Infante,E.F.: A Note on the Stability in Retarded Delay Systems for all Delays. In: Dynamic Systems II, edited by A.Bednarek und L.Cesari,Academic Press, New York,1982,121-133 .

Jac Jacob,F. und Monod,J.: On the Regulation of Gene Activity.Cold Spring Harbor Symp.Quant.Biol.26, 193-211,389-401 (1961) .

Kam Kamen,E.W.: Linear Systems with Commensurate Time Delays:Stability and Stabilization Independent of Delay. IEEE Trans.on Aut.Control AC-27 ,367-375,(1982).

Kap1 Kaper,H.G. und Hejtmanek,J.: Recent Progress on the Reactor Problem of Linear Transport Theory. Preprint 1983.

Kap2 Kaper,H.G.,Lekkerkerker,C,G. und Hejtmanek,J.: Spectral Methods in Linear Transport Theory. Birkhäuser Verlag,Basel,1982.

Ker Kerscher,W. und Nagel,R.: Asymptotic Behavior of One-Parameter Semigroups of Positive Operators. Acta Appl.Math. 2,297-309 (1984) .

Kun Kunisch,K. und Schappacher,W.: Necessary Conditions for Partial Differential Equations with Delay to Generate C_0-Semigroups.J.Diff.Equ.50,49-79, (1983).

Lan Landahl,H.D.: Bull.Math.Biol.31,774 (1969) .

Len1 Lenhart,S.M. und Travis,C.: Stability of Functional Differential Equations. Preprint,to appear in J.Diff.Equ.

Len2 Lenhart,S.M. und Travis,C.: Global Stability of a Biologocal Model with Time Delay. Preprint,to appear in J.Diff.Equ.

Mac MacDonald,N.: Time Lag in a Model of a Biochemical Reaction Sequence with End Product Inhibition. J.theor.Biol. 67,549-556 (1977) .

Mor Morales,M. und McKay,D.: Biochemical Oscillations in "controlled" Systems. Biophys.J.7, 621-625 (1967) .

Nag1 Nagel,R.(ed.):One-Parameter Semigroups of Positive Operators.Springer,1986.

Nag2 Nagel,R.: What can Positivity do for Stability? In: Funct.Analysis,Surveys and Results III. North Holland 1984,145-154 .

Nag3 Nagel,R.: Well-posedness and Positivity for Systems od Linear Evolution Equations. Conference Sem.Mat. Univ. Bari 203,1985 .

Oth Othmer,H.G.: The Qualitative Dynamics of a Class of Biochemical Control Circuits.J.Math.Biol.3,53-70 (1976).

Paz1 Pazy,A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer,New York 1983 .

Paz2 Pazy,A.: On the Differentiability and Compactness of Semigroups of Linear Operators. Journal of Mathematics and Mechanics,Vol.17,1131-1141,(1968) .

Pla Plant,A.T.: Nonlinear Semigroups of Translations in Banach Spaces. J.Math.Anal.Appl.60 ,67-74,(1977).

Phi Phillips,R.S.: Perturbation Theory for Semigroups of Linear Operators. Trans.Amer.Math.Soc.74 (1953), 199-221 .

Sch Schaefer,H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. Springer,Berlin 1974 .

Ste1 Stech,H.W.: The Effect of Time Lags on the Stability of the Equilibrium State of Population Growth Equations .J.Math.Biology 5 (1978),115-120 .

Ste2 Stech,H.W.: Diffussion and Hereditary Effects in a Class of Population Models.In: Differential Equations and Applications,Academic Press,1981 .

Tra Travis,C. und Webb,G.: Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations. Trans.Amer.Math.Soc. 200 (1974),395-418 .

Voi Voigt,J.: Positivity in Time Dependent Linear Transport Theory. Acta Appl.Math. 2,(1984),311-331.

Wal1 Walther,H.O.: On the Eigenvalues of Linear Autonomous Differential Delay Equations. In: Proc. Ordinary and Partial Differential Equations,Dundee 1976 .

Wal Walter,W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer,[illegible] .

Wal6 Walther,H.O.: On a Transcendental Equation in the Stability Analysis of a Population Growth Model. J.Math.Biol.5,115-130 (1978) .

Wil Williams,M.M.R.: Mathematical Methods in Particle Transport Theory.Butterworths,London 1971.

Wol Wolff,M. : A Remark on the Spectral Bound of the Generator of Semigroups of Positive Operators with Applications to Stability Theorie. In: Functional Analysis and Approximation. Birkhäuser Verlag,Basel 1981 .

Zab Zabczyk,J.: A Note on C_0-Semigroups. Bull.Acad.Pol.Sc.23,895-898 (1975) .

Der AG Funktionalanalysis danke ich für die fruchtbaren Diskussionen und Anregungen, Herrn Prof. Dr. K.P. Hadeler für die Hinweise im Bereich der Biomathematik und Herrn Prof. Dr. R. Nagel für die freundliche Überlassung des Themas und für zahlreiche wertvolle Gespräche und Anstöße.

Lebenslauf

Am 12.11.1956 wurde ich als Sohn des Pharmakaufmanns Adolf Kerscher und seiner Frau Anna,geb.Hutzelmann, in Würzburg geboren.
Von 1963-1967 besuchte ich die Zentralschule in Würzburg, von 1967-1972 das Sieboldgymnasium Würzburg,von 1972-1976 das Röntgengymnasium in Würzburg,wo ich am 25.6.1976 die Reifeprüfung ablegte.
Im Wintersemester 1977 nahm ich das Mathematikstudium an der Universität Tübingen auf.Die Diplomvorprüfung bestand ich am 12.10.1979,die Diplomprüfung legte ich am 31.5.1983 ab.
Seit dem 1.12.1983 bin ich beim Verlag Das Beste,Stuttgart, in den Bereichen Marketing Research / Operations Research tätig.

Stuttgart,20.1.1986

Wolfgang Kerscher